PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE
D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

I — 1924

BIBL.
LONDIN
UNIV.

MANIFESTATION DU 10 JUIN 1923 EN L'HONNEUR DE M. ERNEST PASQUIER, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN, DANS LAQUELLE SES AMIS, SES COLLÈGUES ET SES ANCIENS ÉLÈVES ONT FÊTÉ LE CINQUANTENAIRE DE SON PROFESSORAT.

MÉDAILLE FRAPPÉE POUR LES SOUSCRIPTEURS ET DUE A M. A. MAUQUOY, L'AUTEUR DU BUSTE OFFERT A M. LE PROFESSEUR E. PASQUIER

PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE

D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

Secrétaire, **M. ALLIAUME**

Vol. I (nos 1 à 13)
1924

LOUVAIN
LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
UYSTPRUYST, éditeur
1925

BIBL.
LONDIN.
UNIV.

ONT COLLABORÉ A CE VOLUME

M. Ch. de la Vallée Poussin, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (nos 1 et 2).

M. E. Pasquier, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (nos 7 et 13).

M. M. Alliaume, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Louvain (nos 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 et 12).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/publications-du-laboratoire-dastronomie-et-de-geodesie_1924_1

TABLE DES ARTICLES

1. Jubilé professoral de M. Ernest Pasquier, p. 9.
2. Le temps et la Relativité restreinte, par M. *Ch. de la Vallée Poussin*, p. 15.
3. L'approximation des résidus dans la méthode des moindres carrés, par M. *M. Alliaume*, p. 65.
4. Les méthodes de la théorie des erreurs et les équations corrélatives, par M. *M. Alliaume*, p. 73.
5. Essai d'extension de la méthode des moindres carrés au cas dans lequel les lois de probabilité des erreurs sont légèrement dissymétriques, par M. *M. Alliaume*, p. 81.
6. Les jeux d'adresse et la théorie des erreurs, par M. *M. Alliaume*, p. 89.
7. Sur un projet de réforme du calendrier grégorien, par M. *E. Pasquier*, p. 93.
8. La construction du calendrier, par M. *M. Alliaume*, p. 105.
9. Revue annuelle d'Astronomie, 1923, par M. *M. Alliaume*, p. 113.
10. Meilleure approximation dans la détermination du pôle terrestre instantané et essai de systématisation des recherches sur la déviation de la verticale, par M. *M. Alliaume*, p. 153.
11. Généralisation du théorème de Poisson relatif à la probabilité d'un événement dont la cause a subi une modification inconnue, par M. *M. Alliaume*, p. 159.
12. Astronomie et Relativité, Bilan de 1923, par M. *M. Alliaume*, p. 163.
13. Sur les deux espèces d'années entrant dans un calendrier, par M. *E. Pasquier*, p. 203.

N° 1.

Jubilé professoral de M. Ernest Pasquier

Une manifestation en l'honneur de M. Ernest Pasquier a eu lieu, le 10 juin 1923, à l'Université catholique de Louvain, pour fêter le cinquantenaire de sa nomination de professeur.

Le livre d'or de cette belle fête vient d'être publié (1). Sa planche gravée est reproduite en frontispice de ce volume. Nous en extraierons aussi quelques passages du discours par lequel M. le Professeur Ch. de la Vallée Poussin ouvrit la cérémonie à l'Institut de Spoelberg.

Après avoir rappelé les espérances et les promesses que donnait à l'Université de Louvain, en 1873, le choix comme professeur agrégé de M. Pasquier, alors âgé de 24 ans, l'orateur continuait :

« Vous voici donc, cher Maître, au début de votre carrière et, tout jeune encore, professeur de mécanique appliquée. Vous m'avez toujours soutenu que cette branche n'avait pas vos préférences. De fait, vos études vous orientaient plutôt vers la science pure. Mais vos

(1) *Manifestation en l'honneur de M. Ernest Pasquier à l'occasion du cinquantenaire de sa nomination de professeur à l'Université catholique de Louvain*, 10 *juin* 1923. — Louvain, 1924.

élèves, dont j'étais, ne s'en seraient jamais aperçus. Vous enseignâtes, bien au contraire, cette science avec toute la précision que votre forte éducation mathématique permettait d'y introduire. Vous prîtes une part active à son avancement et vous fûtes étroitement mêlé aux controverses qui la concernaient...

« Vous fûtes aussi, dès le début, professeur d'astronomie et de mécanique céleste. Ce titre-là, vous ne l'avez jamais regretté. Le titre d'astronome est aussi celui que le monde scientifique vous a donné... Dès 1886, vous avez rendu aux astronomes de votre génération un service qui vous donne un droit imprescriptible à leur reconnaissance. En leur offrant la traduction française du grand ouvrage d'Oppolzer sur *La détermination des orbites des comètes et des planètes*, l'ouvrage d'astronomie le plus considérable de l'époque, vous leur avez livré un instrument de travail qui leur était indispensable. Cette traduction, bien entendu, est une œuvre originale par beaucoup de côtés. Vous avez rectifié nombre d'erreurs des tables et, en particulier, toutes celles qui ont été signalées plus tard par Leuschner dans le tome II de la *Société astronomique du Pacifique* ; vous avez retouché et modifié la rédaction sur divers points importants, par exemple en prenant, pour la mesure du temps et des longitudes, le méridien initial de Greenwich : d'accord avec l'auteur, vous avez introduit des additions, tel l'article sur la grandeur de la rotation de la Terre prise comme mesure du temps. Et ce que je dis là, ce sont les paroles mêmes de Tisserand, celles dont se servait cet astronome éminent en présentant le Traité à l'Académie des Sciences de Paris, et elles ont d'autant plus de poids dans sa bouche que Tisserand était professeur à l'École d'astronomie de Paris et basait son propre enseignement sur le traité d'Oppolzer, dont la seconde édition allemande, que vous aviez utilisée, venait de paraître. Mais Tisserand n'est pas seul à parler

ainsi. Oppolzer, qui voulut présenter lui-même votre traduction à l'Académie de Vienne, la déclare *parfaite*. Folie, qui la présenta à Bruxelles, s'exprime d'une manière analogue, et je n'en finirais pas si je devais citer les éloges que je trouve, au hasard des revues, sous la plume de Radau, de Vicaire et d'autres spécialistes bien connus.

« Je me suis un peu étendu sur votre premier grand ouvrage d'astronomie et me voici d'autant plus limité pour le reste. Je ne puis cependant passer sous silence le modèle de discussion qu'est votre *Note sur les multiples solutions du problème des comètes*, ni surtout le beau travail que vous avez fait paraître en 1911 sur *Les variations de la latitude et les déviations de la verticale*, dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles.

« Tout le monde sait que les astronomes s'occupent de l'heure et qu'ils ont pour mission de la déterminer ; mais tous les voyageurs ne savent pas ce qu'ils vous doivent à cette occasion. Ils ignorent la peine que vous avez prise pour les débarrasser d'une foule de désagréments et d'ennuis. Il n'y a pas tant d'années, l'anarchie régnait, non seulement entre États différents, mais au sein d'un même pays, dans la détermination de l'heure ; à chaque déplacement, il fallait une enquête pour savoir sur quelle heure régler sa montre. Aujourd'hui, depuis l'adoption presque universelle des fuseaux horaires avec le méridien initial de Greenwich, *l'unification de l'heure* est un fait accompli. Or, personne assurément en Belgique ne s'est intéressé avant vous à cette réforme et n'a contribué plus efficacement à la faire aboutir. En 1886, vous amorciez le projet, par l'introduction du méridien initial de Greenwich dans votre traduction d'Oppolzer, audace qui vous valut les récriminations les moins méritées. Dès cette époque, vous préconisiez le *temps universel* envisagé en 1884 par Oppolzer et vous souteniez le système des fuseaux horaires proposé par le docteur Schram. Votre première publication sur ce sujet spécial date de

1889. Elle parut dans L'Union des Ingénieurs de Louvain sous le titre : *De l'unification de l'heure dans le service des chemins de fer*. Depuis lors vous avez combattu pour cette cause, sans trêve et sans relâche, aplanissant les voies, proposant des solutions acceptables et mesurant au fur et à mesure le chemin parcouru. Vos notes se suivent et se multiplient, tantôt dans la Revue des Questions scientifiques, tantôt dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles, tantôt dans L'Union des Ingénieurs, tantôt dans la Revue Ciel et Terre. Je n'en compte pas moins d'une vingtaine. Mais les succès se succèdent aussi. La Belgique accepte l'heure de Greenwich le 1 mai 1892 ; certaines nations l'avaient devancée, d'autres l'imitent et finalement la France, presque la dernière, l'adopte vingt ans plus tard, en 1911. Ce jour-là, vous avez éprouvé sans doute la satisfaction du général triomphant : la victoire était complète, et, ajoutons-le, définitive...

« La chaire de mécanique que vous occupez avait été illustrée par Gilbert...

« La partie délicate, la partie difficile dans un cours de mécanique rationnelle, c'est l'exposition des notions premières et des principes généraux. En dehors de cela, il ne reste qu'à traiter un contingent plus ou moins grand de problèmes dont la solution est classique. Mais les principes sont nombreux et divers, ils forment un domaine étendu et plein d'embûches où l'originalité et plus encore le sens critique du maître trouvent matière à s'exercer. C'était encore bien plus vrai, il y a une trentaine d'années, qu'aujourd'hui. La mécanique passait alors par une période d'ébranlement et de transformation qu'on a appelée *la crise de la mécanique*. Faut-il rappeler la découverte de la radioactivité, la notion électrodynamique de la masse et la théorie des rayons cathodiques qui semblaient infirmer des principes sacro-saints ? Puis les critiques

serrées des Kirchhoff, des Mach, des Poincaré et de tant d'autres qui dévoilaient l'inconsistance des vieilles formules, et je suis bien sûr que vous n'avez pas oublié les séances épiques de la première section de la Société scientifique de Bruxelles où ces questions étaient à l'ordre du jour : vous n'avez pas oublié ces débats auxquels vous preniez part, alors que d'une main quelquefois un peu timide vous tâchiez de retenir votre vieux maître Mansion sur la pente du nominalisme, ne pouvant vous résoudre à enseigner une mécanique vidée de tout son contenu, fût-ce même de ses difficultés. Quel beau temps c'était que celui-là ! Et quand je parcours vos articles d'alors, leurs seuls titres ne résonnent-ils pas encore comme la voix d'un lointain écho ? 1895, *Sur les principes de la mécanique rationnelle* ; — 1897, *Sur le principe des travaux virtuels* ; — 1898, *Sur la généralisation de certains principes de la mécanique, sur le principe de l'énergie, sur les équations du mouvement d'un système à liaisons* ; 1901, *Sur les principes de la mécanique rationnelle.* Tout cela c'était la substance même de vos leçons, c'étaient des extraits parfois textuels de votre *Cours de Mécanique analytique,* dont le premier volume autographié paraissait en 1896. On a publié depuis des ouvrages plus encyclopédiques, le vôtre l'emporte à certains égards : aucun ne révèle le même souci d'objectivité, n'aborde les difficultés avec autant de franchise, ne les discute avec une pareille conscience. On a remarqué que votre cours est le premier où la variation de la masse du point ait reçu droit de cité...

« Vous aimez aussi les questions philosophiques.Votre esprit s'arrête volontiers sur les sommets hasardeux de l'empire des sciences où l'intelligence s'affronte avec l'expérience pour lui arracher le pourquoi des choses. Assurément votre place était tout indiquée à l'Institut supérieur de Philosophie. Vous avez apporté votre pierre dans

le grand œuvre de reconstruction philosophique entreprise par le Cardinal Mercier. Vous avez inscrit votre nom sur les registres de cet Institut et publié dans ses annales. Vos leçons sur *Les hypothèses cosmogoniques* sont résumées dans la Revue néo-scolastique ; elles font apparaître le souci d'exactitude, l'universalité d'information qui caractérisent votre manière d'enseigner. Heureux les jeunes philosophes qui ont reçu votre empreinte ; elle leur sera aussi précieuse qu'elle aura été profonde !... »

Offrant au jubilaire son buste en bronze, M. de la Vallée termina par cette belle péroraison :

« Cher Maître, vous pouvez accepter ce souvenir sans crainte ; vos enfants seront fiers de le montrer aux leurs ; il leur enseignera la voie du devoir. Le devoir c'est la règle unique de votre vie. Vos devoirs envers vos élèves, ne les avez-vous pas accomplis avec une conscience qui va jusqu'au scrupule ? Le bien de l'Université a été votre perpétuel souci : le premier à le prévoir, vous l'avez poursuivi avec une persévérance inlassable, avec obstination, dans le plus complet oubli de vous-même. Vous avez été le modèle du maître chrétien. Vos calculs vous ont conduit à travers des solitudes effrayantes jusqu'aux limites incertaines de l'Univers et vous ne vous êtes point troublé devant le mystère de l'infini ; par delà les constellations innombrables, vous vous êtes élevé jusqu'au Créateur, et vous avez proclamé que les cieux racontent la gloire de Dieu. Vos yeux ne se sont pas fermés aux vérités éternelles, vous avez entendu le Verbe divin et vous n'avez pas trouvé de contradiction entre la science et la foi. Mais point n'était besoin que vous nous le disiez : votre témoignage, c'est votre vie. Après tant d'autres leçons que vous nous avez données, je crois que c'est encore celle-là la plus belle de toutes. »

N° 2.

Le Temps et la Relativité restreinte

par M. Ch. de la Vallée Poussin (1)

I. — Appréciations divergentes sur la Relativité

Peu d'hommes assurément, parmi ceux qui s'adonnent aux sciences abstraites, ont eu la singulière fortune d'entendre autant de bruit s'élever autour de leur nom que le professeur Albert Einstein. C'est qu'Einstein, physicien et mathématicien d'une profonde originalité, est le principal auteur de la théorie de la *Relativité*.

D'après ses admirateurs passionnés, cette théorie apporte dans notre connaissance de l'Univers une révolution plus considérable que celle réalisée par Newton ; elle ramène au même principe toutes les théories physiques, celles de la lumière, de l'électromagnétisme et de la gravitation : ainsi elle parfait la science dans une unité définitive. Avec le principe d'équivalence, elle jette sur la nature des choses et sur les chemins ouverts au progrès, des perspectives si vastes et si merveilleuses que l'esprit qui les entrevoit pour la première fois, en est ébloui et comme confondu.

Par contre, les adversaires des einsteiniens ne peuvent cacher leur défiance sinon leur indignation. Certains métaphysiciens s'émeuvent et interviennent sans bien-

(1) Discours prononcé en séance solennelle de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, le 15 déc. 1923. Reproduit du Bulletin de l'Académie.

veillance. Ils veulent bien accorder aux doctrines mathématiques d'Einstein le tribut d'admiration dédaigneuse que l'on doit aux choses que l'on ne comprend point, mais ils protestent véhémentement contre l'introduction de la mathématique « science inférieure » dans le domaine inviolable de la philosophie. Ils prennent la défense du bon sens outragé ; ils réclament contre des paradoxes qui méconnaissent, à ce qu'ils prétendent, les principes les plus évidents du sens commun, ou nient les résultats les mieux confirmés par l'expérience de chaque jour.

Est-il vrai, demandent-ils, que l'espace et le temps ne puissent se distinguer l'un de l'autre et que, seul, leur amalgame connu sous le nom barbare et minkowskien d'*espace-temps* ait une existence réelle ? Est-il vrai que le boulet de Jules Verne lancé à travers le monde étoilé garde son hôte de la vieillesse ? Est-il vrai qu'un message suffisamment pressé arrive avant de partir, ou qu'un simple coup d'œil jeté dans les archives de quelque monde lointain nous y fasse lire le récit déjà poudreux de notre avenir ?

Que faut-il répondre à ces questions étranges ? Faudra-t-il crier au miracle ou au scandale ? Quel jugement porterons-nous sur la *Relativité* ?

Disons-le tout de suite. L'œuvre d'Einstein s'impose à l'admiration ; mais pour mériter de tels éloges, il lui manque cependant la consécration éclatante et séculaire que le temps a accordée à l'œuvre de Newton. La théorie de la relativité générale qui est l'œuvre propre d'Einstein, se range parmi les constructions les plus séduisantes de l'esprit par son admirable cohésion logique et l'étendue de la synthèse qu'elle réalise. La plupart des mathématiciens des deux mondes en sont d'accord, mais il n'y a que les véritables mathématiciens qui soient à même d'en juger.

C'est pourquoi nous ne parlerons pas de la relativité générale ; aussi bien, parmi les énigmes qui intriguent le

public, il n'en est pas une seule qui ait été soulevée par les travaux propres d'Einstein. Elles ont leur origine dans l'expérience, en particulier dans celle de Morley-Michelson (1), et dans les travaux de l'illustre physicien hollandais Hendrik Antoon Lorentz (2). Ces travaux remontent à la fin du siècle dernier et au début du siècle actuel, et les énigmes qu'ils soulèvent ont été discutées, depuis vingt ans, par Henri Poincaré, dans des articles célèbres réunis en volumes et devenus classiques (3). A cette époque, Einstein n'avait encore rien publié sur la Relativité. Il avait déjà, dit-on, beaucoup d'idées ; mais s'il faut croire son vieux maître Hurwitz, professeur à l'*Ecole fédérale de Zurich*, elles ne valaient pas toutes celle du principe de la relativité (4).

Il ne sera donc pas beaucoup parlé d'Einstein dans ce discours. Mon ambition est plus modeste et je m'en tiendrai à la Relativité restreinte qui ne doit à Einstein que la forme définitive sous laquelle nous en parlerons (5). Je voudrais vous montrer que cette théorie relève de l'expérience et non du bon sens que l'on invoque contre elle ; qu'elle touche beaucoup moins à la métaphysique qu'on ne le prétend parfois. Elle n'y confine guère qu'en posant la question suivante : Que faudrait-il entendre par

(1) A.-A. Michelson and E.-W. Morley, The American Journal of Sciences and Arts (3), 34 (1887), p. 333. — Philosophical Magazine, London, Edinburgh and Dublin (5), 24 (1887), p. 449. Ces expériences sont décrites dans tous les ouvrages sur la Relativité.

(2) Antoon Lorentz, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light.* Proceedings Ac. Sc. of Amsterdam, 6 (1904), p. 609.

(3) *La Science et l'Hypothèse ; Science et Méthode.* Bibliothèque de Philosophie scientifique. Paris, Ernest Flammarion. Relire dans ce dernier volume le chapitre sur la mesure du temps.

(4) Cité par M. Du Pasquier, *Le principe de Relativité et les théories d'Einstein*, Paris, Octave Doin, 1922, p. xii.

(5) Le Mémoire fondamental d'Einstein, *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* (où se trouve l'exposé systématique de la Relativité restreinte) est de 1905.

la simultanéité de deux événements qui ont lieu sur des théâtres différents ? Suivant que cette simultanéité est un absolu (accessible, bien entendu, au physicien) ou qu'elle dépend d'une convention; il y a un temps cosmique absolu ou il n'y en a pas. Dans le premier cas, la théorie de la relativité est indéfendable ; dans le second, on peut admettre des temps multiples et il n'y a pas d'objection de principe contre cette théorie.

Pour éclaircir cette question, il convient, pour commencer, de passer en revue les données intuitives concernant le temps, l'espace et la simultanéité. Nous rencontrerons un certain nombre de principes primordiaux, qu'aucune théorie ne peut heurter sans se condamner d'avance. Revenant alors à la Relativité et aux questions d'apparence paradoxale que nous venons de poser, il sera facile de faire le départ entre celles qui sont absurdes *a priori* et celles qui peuvent s'interpréter raisonnablement.

2. — Trois notions différentes du temps

Qu'est-ce que le temps ?

Nous n'essayerons pas de le définir. Certains philosophes ont proposé des formules plus ou moins heureuses et qui contiennent une part de vérité, mais ces formules ne nous serviraient à rien : elles n'apportent aucun éclaircissement à la question litigieuse de la simultanéité des événements.

D'ailleurs, nous n'étudions pas le temps en métaphysicien mais en physicien ; nous nous plaçons à un point de vue empirique, désireux seulement de dégager de l'idée de *temps* ce qu'elle renferme d'intelligible pour le mathématicien et d'utilisable pour l'observateur.

Notre analyse sera forcément fort incomplète. Notre représentation du temps est liée à des phénomènes infiniment variés, les uns physiques, les autres physiologiques : elle dépend à la fois de la nature de la sensation et de celle

de l'entendement. Je serai obligé de choisir, de séparer ce qui n'est jamais complètement désuni, de schématiser, donc de mutiler les divers aspects de la notion qui nous intéresse. Ce sont là des inconvénients qu'il n'y a pas moyen d'éviter.

Je vais étudier trois temps différents et nettement distincts :

Le *temps psychologique* que je vis et que je perçois directement dans ma conscience ;

Le *temps physique* que je trouve dans les choses ;

Le *temps mathématique*, pure abstraction, que j'introduis dans mes formules et sur lequel beaucoup de personnes raisonnent sans le savoir.

Ces trois temps se différencient au point de vue logique, mais ils se complètent pour former la notion intégrale et commune du temps.

3. — Le temps psychologique

Des trois concepts précédents, le premier dans l'ordre de la connaissance est celui du *temps psychologique.* Sans lui, je n'aurais pas l'idée des autres. Ma perception du temps psychologique, c'est-à-dire du temps *vécu et conscient* (1), se fait dans ma conscience elle-même, qui me révèle les changements éprouvés par le *moi.* C'est par cette sorte d'introspection que j'arrive aux concepts de *présent,* de *passé* et d'*avenir.*

Tant que mon attention est attachée à un même ensemble d'objets, sensations, idées..., et que je ne remarque pas de changement dans mon état *de conscience,* je dis que cet état de conscience est présent. Cet état, qui peut, dans certains cas de concentration cérébrale, avoir une

(1) Ce sont les termes de M. Bergson, *Durée et simultanéité.* Biblioth. de Philos. contemp. Paris, Alcan. — Nous n'acceptons point les thèses de cet ouvrage concernant la Relativité. (Voir la note, p. 355.)

fixité surprenante, est ce que j'appelle le *présent*. Mais cet état est instable : j'aperçois soudain que j'ai changé, que je suis *devenu* autre chose. Je m'en aperçois parce que ma mémoire oppose l'image du présent disparu à un nouveau présent, qui a pris sa place, et le présent évanoui n'est plus qu'un *souvenir*. Ce souvenir se superpose à tous les autres déjà classés dans ma mémoire, pour constituer le dernier anneau d'une chaîne que j'appelle *le passé*. Cette chaîne plus ou moins longue m'apparaît dans une sorte de perspective que j'appelle *la durée* et je ne trouve, par conséquent, de durée que dans la chaîne des souvenirs (1). Si la durée se réduisait à des souvenirs isolés, elle serait discrète, tandis que nous lui prêtons les caractères d'un continu physique. Pourquoi ? Pour des raisons multiples et un peu obscures : parce que tel est le caractère des sensations dont le souvenir persiste et qui passent sans solution de continuité d'un chaînon à l'autre (2) ; parce que des états de conscience qui étaient indivis dans le présent, se dédoublent, se désagrègent et deviennent multiples dans le souvenir ; parce que des souvenirs perdus se réveillent, à l'occasion, entre d'autres souvenirs, comme si la chaîne du passé pouvait être indéfiniment subdivisée. Telle nous apparaît la durée consciente.

La considération de la chaîne du passé fait naître en nous l'idée de l'*avenir*. Nous concevons que la chaîne se prolonge au delà du dernier anneau réalisé, et ce sont ces anneaux *possibles* qui constituent l'avenir.

(1) L'impression de recul qui se lie au sentiment de la durée provient, pour une part, de l'association d'images motrices ou spatiales. Mais cette association n'a rien d'essentiel.

(2) On affirme souvent que la continuité du temps est inséparable de celle de l'espace. Je ne le crois pas. La continuité n'est pas le privilège exclusif des sensations musculaires et visuelles aux frais desquelles nous construisons notre représentation de l'espace. Les autres sensations sont continues aussi, et l'audition d'une sonate de Beethoven me donne aussi bien le sentiment de la continuité du temps, que la contemplation de la baguette du chef d'orchestre.

Nous remarquons dans le passé des événements périodiquement renouvelés : des jours et des nuits, des heures fixes qui ramènent les mêmes occupations, les mêmes habitudes ou les mêmes besoins. Ces événements périodiques jalonnent la route du passé, la divisent en cases, où d'autres événements, ceux-ci fortuits et sans loi, viennent prendre place. Une induction bien naturelle nous fait prévoir le retour des mêmes jalons dans l'avenir et nous construisons ainsi un cadre dont les cellules sont encore vides de réalités, mais que nous remplissons à l'avance de nos projets, de nos appréhensions ou de nos espoirs. Pour beaucoup, le cadre ainsi construit est la figure même du temps (1).

Comme on le voit, aucune de ces notions intuitives ne fait appel à celle de l'espace. Un homme supposé aveugle et incapable de tout mouvement depuis sa naissance, peut les acquérir, sans avoir cependant aucune représentation ni du mouvement ni de l'espace. J'en conclus que *l'idée psychologique et intuitive du temps est complètement distincte de celle de l'espace.*

En définitive, et ceci est l'essentiel, dans le temps psychologique, on découvre trois éléments qui sont absolument indispensables à son intelligibilité :

1° Un *substratum* permanent : le moi ;

2° Une *forme changeante* ou *évolutive* : l'état de conscience ;

3° Un phénomène d'*hérédité* : dans chaque état de conscience, l'empreinte, suivant un ordre déterminé, des états antérieurs : c'est la chaîne des souvenirs.

Ce phénomène d'hérédité assure *l'irréversibilité* du temps et nous donne la certitude que l'ordre des événements vécus ne sera jamais inverti.

(1) C'est même à cause de cela que les personnes peu réfléchies donnent au temps une existence en dehors des choses, ou même une sorte de préexistence sur elles. Il est clair cependant que le temps ne se trouve que dans le *mode d'existence* des êtres qui évoluent.

4. — Le temps physique. Est-il universel ?

Le temps psychologique est propre à chaque conscience individuelle. Si les diverses consciences étaient fermées les unes aux autres, il y aurait autant de temps différents que de consciences. Mais il n'en est pas ainsi : les consciences interfèrent entre elles et avec le monde extérieur. De là vient que nous voulons juxtaposer tous les temps conscients et les fusionner en un temps unique et universel qui embrasserait non seulement tous les phénomènes de conscience, mais aussi tous ceux du monde extérieur. Nous y réussissons d'ailleurs d'une manière très suffisante au point de vue pratique. Ce temps commun à nous et aux choses, c'est le *temps des choses* ou le *temps physique*.

Je vais tâcher de reconnaître par quel chemin je passe de mon temps *intérieur* à la conception de ce temps *extérieur* qui englobe le mien.

Je perçois le monde extérieur avec mes sens et je me fais une représentation, extrêmement partielle sans doute, mais suffisamment précise des phénomènes qui se produisent en dehors de moi. Cette image changeante prend place parmi mes souvenirs et se déroule dans mon propre temps psychologique. Maintenant cette apparence temporelle de la représentation des choses a-t-elle une valeur objective ? Autrement dit, le temps existe-t-il seulement en moi, ou bien se trouve-t-il aussi dans les choses ? C'est toute l'objectivité du temps.

Pour que l'on puisse affirmer que les choses évoluent dans un temps propre, il faut y retrouver les trois éléments constitutifs de la notion du temps : matière persistante, évolution, hérédité. Si ces trois éléments se retrouvent dans les choses, il est possible de reconstituer l'histoire d'événements qu'aucune conscience n'a jamais perçus. Or, qui donc peut vraiment douter qu'ils s'y trouvent ?

Les géologues assurément n'en doutent point lorsqu'ils

nous racontent l'histoire de l'écorce terrestre. Cette écorce est une matière persistante, dont l'évolution se fait par bouleversements successifs, et chaque bouleversement porte l'hérédité de tous ceux qui l'ont précédé. Si la chronologie de ces événements successifs ne s'est inscrite dans aucune conscience humaine, le géologue n'en est pas moins convaincu de sa parfaite objectivité.

Pour le géologue comme pour le physicien, mais pour d'autres raisons, la question la plus délicate est celle de fixer la simultanéité des phénomènes observés dans des régions différentes.

C'est que, en effet, la *chronologie des choses* soulève une difficulté que l'on ne rencontre pas dans le temps psychologique. La matière dont il s'agit de faire l'histoire est répandue dans tout l'Univers, et chaque parcelle de cette matière a peut-être son histoire propre. De même qu'il était question d'enfermer toutes les consciences dans un seul et même temps, on peut aussi se demander si l'histoire de tous les corps répandus dans l'espace se déroule dans un seul et même temps.

Si la réponse est affirmative, on pourra concevoir une sorte de conscience suprême qui classerait tout dans son temps comme nous classons dans le nôtre le peu de choses que nous observons. On pourra dire, dans ce cas, qu'il existe, pour l'Univers, un temps unique et universel ou encore un *temps absolu*. Les mots : *avant, après, simultanément* prendront alors un sens absolu : c'est la thèse de Newton.

Mais la réponse est douteuse et il paraît même très probable qu'elle est négative.

Pour qu'il y ait un temps physique absolu, il faut que la chronologie des événements soit imposée par des conditions physiques décisives. S'il n'y a, généralement, aucune difficulté à ranger dans l'ordre chronologique les événements qui affectent un même corps, la question est beaucoup plus difficile, peut-être même insoluble, si

les événements affectent des corps très éloignés les uns des autres.

En effet, d'après le sens que nous donnons à la succession, on ne peut affirmer l'antériorité absolue d'un événement A sur un événement B produit dans un autre corps, que si l'apparition de B comporte, sous n'importe quelle forme d'ailleurs, une hérédité provenant de A, donc une action, de nature quelconque, de l'événement A sur l'événement B.

Pour que ce principe d'hérédité, le seul dont le physicien dispose, suffise à fixer, d'une manière absolue, la chronologie commune à deux corps différents, et cela avec une précision allant jusqu'à définir la simultanéité, il faut que l'influence exercée à distance par deux corps l'un sur l'autre soit, ou puisse être instantanée. Admettre cette instantanéité, c'est admettre l'*action à distance*. L'action à distance, c'est-à-dire la transmission instantanée d'une causalité ou d'un déterminisme physique quelconque, est une conception qui a toujours répugné aux esprits philosophiques. Pas de temps absolu sans action à distance : voilà une constatation qui nous met singulièrement en défiance vis-à-vis de la réalité d'un temps universel et absolu (1). Cette notion de distance intervenant ici m'amène nécessairement à parler de l'espace.

5. — Privilège du contact. Il existe un temps universel, mais dans un sens restreint

Au premier stade de notre intuition spatiale, nous nous prenons comme centre du milieu qui nous entoure, et c'est relativement à nous-mêmes que nous *localisons* les objets qui s'y trouvent. Localiser un objet, comme le

(1) La répulsion instinctive pour l'action à distance est déjà une preuve que la représentation psychologique de l'espace ne peut entièrement s'affranchir de celle du temps et que l'idée de distance est inséparable de celle d'un temps nécessaire pour la parcourir.

dit excellemment Henri Poincaré, c'est se figurer les mouvements qu'il faut faire pour toucher cet objet. Les divers points de l'espace intuitif sont donc *définis* par les mouvements qui les repèrent. On reconnaît là une première ébauche de l'espace galiléen, non moins relatif, dont les points sont repérés, d'une manière analogue, au moyen de leurs coordonnées métriques par rapport à trois axes rectangulaires. Mais les principes acquis par l'intuition primitive sont antérieurs à toute spéculation métrique et sont inviolables. *Un corps est là où on le touche*, cette maxime du bon sens n'est qu'une définition. Deux corps sont *en dehors l'un de l'autre* s'il faut nécessairement un mouvement pour passer du contact de l'un à celui de l'autre. Cette distinction aussi est antérieure à tout essai de mesure et elle exprime un fait de *situation* qui est d'une autre nature que la distinction entre deux instants différents de l'existence d'un même corps ; concluons : *Le temps et la géométrie de situation sont irréductibles l'un à l'autre.* Aucune théorie, si savante soit-elle, ne nous fera jamais admettre le contraire, et l'on peut être assuré qu'elle ne le tentera même pas.

Non seulement le toucher localise les phénomènes dans l'espace, mais il les localise aussi dans le temps : je juge invinciblement qu'un corps impénétrable agit sur moi *au même instant que je le touche.* Je distingue, en effet, dans cette *prise de contact*, trois actes dont la succession s'impose : ma volonté de toucher, la réaction de l'objet, la sensation que j'ai de cette réaction. Le premier et le dernier des trois actes sont conscients et enserrent la réaction du corps avec une telle précision que les trois actes entrent à la fois dans mon présent psychologique. J'en conclus que l'action et la réaction au contact sont simultanées et que l'objet existe et agit sur moi à l'instant même de ma perception.

Tel est le privilège du contact. Il nous met en relation avec l'objet d'une manière immédiate sous le double

rapport de l'espace et du temps. Le physicien ne pourrait renoncer à cette certitude sans s'interdire toute manipulation d'appareil et rendre impossible toute interprétation d'expérience.

D'après cela, il n'y a donc aucune difficulté à faire cadrer dans un seul et même temps tous les phénomènes qui nous sont révélés au contact, puisqu'ils viennent d'eux-mêmes se classer à leur place dans notre temps psychologique.

En sera-t-il de même pour les phénomènes qui se déroulent hors de la portée de nos mains ?

Oui encore, grâce aux couleurs qui viennent frapper nos yeux, *mais sous certaines réserves.*

Si nous nous bornons aux phénomènes qui ne se produisent pas trop loin de nous, ceux, par exemple, qui affectent notre globe, il est encore vrai de dire que ces phénomènes se produisent à l'*instant* où nous les voyons, à condition de prendre le mot *instant* dans son sens psychologique. La radiation lumineuse est, en effet, si rapide que la durée du trajet échappe à toute appréciation de notre sensibilité, et nous pouvons encore raisonner dans ce cas comme dans celui du contact. Si exigeants soient-ils, le physicien et l'astronome sont bien obligés d'admettre cette conclusion quand ils font des lectures sur leurs appareils, que ce soit dans un laboratoire ou sous une coupole.

Nous admettrons donc que tous les phénomènes terrestres s'écoulent dans un temps unique et universel qui se juxtapose exactement à notre temps psychologique. Cela sera vrai, en particulier, pour tous les phénomènes de la vie sociale, les seuls, après tout, qui intéressent le sens commun. On peut être bien tranquille, la *Relativité* ne se dressera pas en ennemie contre l'heure civile et universelle de Greenwich.

Mais il ne faudrait pas oublier que cette conclusion ne s'étend pas aux phénomènes célestes, ni même aux phéno-

mènes terrestres s'ils sont soumis à des procédés de discrimination plus subtils que nos sens. C'est pour ces phénomènes-là, tout à fait étrangers à l'expérience vulgaire, que la théorie nouvelle a été créée. Avant d'y venir, arrêtons-nous encore sur la mesure du temps et sur celle des longueurs.

6. — La mesure du temps. Le chronomètre universel

Le temps, psychologique ou physique, ou plus exactement sa durée, peut varier, mais cette grandeur n'est pas *mesurable* au sens strict ou mathématique du mot, parce qu'elle ne peut se décomposer en parties égales, c'est-à-dire superposables. On ne peut, en effet, transporter une partie de durée dans le temps comme on transporte une règle dans l'espace. Pour mesurer le temps, il est commode de le *spatialiser*. A cet effet, on substitue d'une manière univoque des intervalles d'espace à des intervalles de temps, et la mesure des premiers à celle des seconds. *A priori* tout point mobile sur sa trajectoire peut constituer ce que l'on appelle *une horloge* et fixer la correspondance. A chaque instant correspond une position du mobile, et à chaque intervalle de temps un arc déterminé de la trajectoire : la longueur de cet arc mesure, par définition, l'intervalle de temps.

Cependant on se laisse guider dans le choix de l'horloge par un opportunisme judicieux. La meilleure horloge, c'est la plus commode ; et, pour le savant, c'est celle qui conduit à l'expression la plus simple des lois de la nature. L'astronome pense atteindre ce résultat en considérant la rotation de la Terre comme uniforme. Son horloge est naturelle ; elle a pour cadran le ciel étoilé, et pour aiguille la lunette méridienne.

Les physiciens acceptent, pour leur usage, la mesure astronomique du temps, mais ce n'est pas une acceptation de principe. Ils veulent bien que la Terre soit une excel-

lente horloge pour ses habitants, mais ils refusent d'y reconnaître une horloge universelle.

Les physiciens ont remarqué que les corps vibrants sont aussi des horloges naturelles. Ils ont observé que la vibration d'un corps élastique, tel un ressort, a toujours la même durée ou la même *période*, pourvu que le corps soit soustrait à toute action étrangère. C'est sur ce principe qu'ils construisent leurs chronomètres.

Les périodes des vibrateurs sont donc toujours dans le même rapport entre elles et avec la seconde de temps des astronomes quand on expérimente sur la Terre. Mais qu'arriverait-il si tous ces vibrateurs étaient emportés dans un laboratoire animé d'une translation uniforme et rapide dans l'espace ?

Eh bien ! d'après les physiciens relativistes, les vibrateurs resteraient d'accord entre eux et se brouilleraient avec la rotation de la Terre, dont les indications deviendraient d'ailleurs énigmatiques (1). Donc, disent les physiciens, la Terre en giration n'est qu'une horloge locale et le véritable chronomètre universel c'est le vibrateur. Les horloges des physiciens seront donc toujours, par hypothèse, des compteurs de vibrations (2).

7. — Les étalons de longueur et de temps

La mesure des longueurs, dont j'ai aussi à dire un mot, est fondée sur les propriétés des corps solides. L'unité de longueur, le mètre, est définie par un étalon en platine déposé au pavillon de Breteuil. On peut supposer ce mètre partagé en parties égales et superposables, mais,

(1) Par suite de l'incertitude sur la synchronisation des événements entre le laboratoire et la Terre.

(2) Un physicien armé de son chronomètre *compteur* de vibrations, pourrait, à la rigueur, se passer de la spatialisation du temps et se contenter d'un temps nombrable, mais le mathématicien en a besoin s'il veut définir la mesure d'un temps continu.

comme ce corps est formé de molécules et d'atomes isolés, le partage ne peut être poursuivi indéfiniment : il s'arrête nécessairement à l'échelle moléculaire. A cette échelle, il n'y a plus de corps solide, donc plus de procédé direct de mesure et même plus de géométrie physique, puisque la géométrie physique ce sont précisément les propriétés métriques des corps solides.

Le mètre n'est pas un étalon sans défaut : il est sujet à des variations dues à la température, à la pression et aux incessantes transformations moléculaires. D'autre part, si cet étalon était perdu, comme il est défini par sa seule individualité, il n'y aurait aucun moyen de le reconstituer. Les physiciens ont donc cherché un étalon dépourvu de ces inconvénients et ils ont cru le trouver dans la longueur d'onde lumineuse. Bien entendu, il faut fixer une couleur bien déterminée, par exemple le rouge de la vapeur de cadmium, qui se détermine aussi par la raie correspondante du spectre. Cet étalon nouveau peut être rattaché au mètre par la mesure des franges d'interférence et c'est une grandeur extrêmement petite quoique considérable par rapport aux distances moléculaires. Parmi les radiations visibles, il en est de l'ordre du cent-millième de millimètre et les distances moléculaires sont encore cent fois plus petites.

L'étalon de temps, c'est la seconde des astronomes. Il présente des inconvénients analogues à ceux du mètre, car la constance de la rotation de la Terre sur elle-même n'est pas, même au point de vue de la mécanique ordinaire, un dogme absolu. De même que l'on a proposé de prendre une longueur d'onde lumineuse pour étalon de longueur, on a proposé d'en prendre la *période* pour étalon de temps. Ainsi seraient rattachés aux propriétés de la lumière les deux étalons de longueur et de temps. Il est bien remarquable que ces suggestions aient été faites sans souci de relativité et nous aurons à en reparler plus tard.

8. — La subdivision de l'espace et du temps physiques. Jusqu'où est-elle possible ?

Nous ignorons jusqu'où peut se poursuivre la subdivision physique des longueurs et des temps, mais elle ne peut se poursuivre à l'infini avec les moyens dont nous disposons et il est possible qu'elle ait un terme infranchissable imposé par la nature même des choses.

Il semble ressortir, en effet, des travaux les plus profonds sur l'électricité et la thermodynamique que l'atomicité soit une des lois fondamentales de la nature. Elle est admise depuis longtemps pour la matière elle-même ; l'électricité a aussi son atome qui est l'électron ; et il semble maintenant que l'atomicité règne aussi dans le domaine de l'action.

L'action se mesure par le produit d'une énergie par un temps, et la quantité minimum d'action serait le *quantum*. La théorie des *quanta* créée par le Dr Max Planck il y a peu d'années fait de rapides progrès, et si elle est exacte, la continuité disparaîtrait de la nature. L'évolution de l'Univers se ferait par pulsations consécutives : entre deux états distincts, il y aurait un minimum de différence possible : tout jusqu'au temps lui-même serait réduit en atomes et il n'y aurait plus rien que de nombrable dans le monde (1). Mais ces théories sont encore bien hasardeuses et il serait prématuré de vouloir y appuyer des conclusions. Le seul fait de leur existence cependant méritait déjà d'être signalé.

Il est à peine besoin de le dire, les quantités de l'ordre de la période lumineuse tombent infiniment en dessous

(1) Un relativiste bien connu, Eddington, a imaginé un procédé d'évaluation du quantum et l'extrême petitesse du nombre trouvé laisse bien loin derrière elle celle des nombres indiqués jusqu'ici. La valeur du *quantum* serait, d'après lui, de 10^{-115} ergs-seconde. Nous laissons à Eddington l'entière responsabilité de son résultat. (*Espace, Temps et Gravitation*, Paris, 1921, p. 168).

des plus petites durées accessibles à nos sens, et même à nos instruments enregistreurs les plus parfaits. La durée psychologique n'est divisible que jusqu'à une limite bientôt atteinte, car toute perception consciente exige une durée relativement grande si on la compare à celle que les appareils enregistreurs peuvent encore mesurer. D'après Charles Richet (1), la durée la plus courte que nous puissions percevoir et apprécier ne dépasse pas le dixième de seconde (2). M. Émile Borel (3) a eu la curiosité de comparer cette durée à celle de la vibration lumineuse. Un simple calcul montre qu'il y a autant de vibrations lumineuses dans une seconde que de secondes dans les millions d'années des époques disparues dont les géologues nous racontent l'histoire. S'il existait un être assez subtil pour percevoir la durée d'une vibration lumineuse comme nous saisissons le dixième de seconde, la durée d'une seconde lui paraîtrait aussi démesurément longue que nous paraissent à nous les périodes géologiques.

Les considérations précédentes permettent de préciser le sens, un peu relatif, que nous donnons aux termes d'instant et de simultanéité.

L'*instant psychologique* est la position assignée dans le temps psychologique à un phénomène dans lequel la conscience ne perçoit aucune durée. Deux phénomènes que la conscience ne peut séparer par une durée perçue sont simultanés au point de vue psychologique.

(1) Acad. des Sciences de Paris, décembre 1921.

(2) Comment la sensation qui paraît continue peut-elle se partager en fractions indivisibles ? C'est un phénomène bien déconcertant au point de vue logique. Il faut que la sensation nue comporte une part essentielle d'indétermination et laisse place à un complément de détermination purement psychologique, mais cela reste bien obscur. Aussi, depuis longtemps, les mathématiciens ont-ils renoncé à fonder leurs principes sur le sable mouvant du continu physique.

(3) *L'Espace et le Temps*. Paris, Alcan, p. 115.

L'*instant physique* n'a point de durée enregistrable par les appareils de laboratoire et il peut être beaucoup plus précis que l'instant psychologique. La simultanéité acquiert donc, au point de vue physique, une précision correspondante.

L'instant et la simultanéité, *au sens mathématique*, sont de pures abstractions, mais ont une précision absolue. Comme l'espace et le temps mathématiques dont nous allons nous occuper maintenant, ce sont des constructions artificielles de l'esprit.

9. — L'espace et le temps des mathématiciens

La géométrie physique est une science expérimentale. Elle en a les caractères d'approximation et d'imperfection. Elle nous suffit pratiquement pour mesurer les grandeurs à notre échelle, mais elle ignore ce qui se passe dans l'infiniment petit comme dans l'infiniment grand. Cette science ne peut satisfaire le mathématicien épris de rigueur et de précision, car elle ne donne point prise à ses raisonnements inflexibles. Le mathématicien pur prétend ne relever que de lui-même. Il se construit, pour son usage personnel, une géométrie idéale et substitue le temps mathématique à la mesure du temps physique.

Pour construire la géométrie, la matière qu'il crée de toutes pièces et qu'il façonne à sa fantaisie, est le *continu mathématique*, qui n'est plus qu'*un continuum de nombres purs*, soumis, par définition, à tous les principes de la théorie des limites. Avec ce continuum il construit un *schema*, dont l'existence est purement logique, et dans lequel les propriétés plus ou moins grossières des solides naturels se vérifient exactement par hypothèse. C'est sur ce *schema*, ou cet *espace abstrait*, qu'il construit ses démonstrations subtiles et ses théories raffinées.

Il en va de même avec le temps. De même que le physicien spatialise son temps par la considération d'un

point matériel mobile, le géomètre définit la mesure du temps mathématique par celle de l'arc décrit par un point idéal dans l'espace abstrait ; il définit l'instant sans étendue par une position du point, ce qui donne, en même temps, à la simultanéité son sens limite d'une précision absolue.

Les théories ainsi construites sont d'une rigoureuse logique, mais leur valeur objective n'est pas garantie. Le mathématicien peut poursuivre les conséquences de ses hypothèses avec une rigueur absolue jusque dans l'infiniment grand et dans l'infiniment petit, mais il sait, mieux que personne, que ces conclusions ne s'imposent pas à la Nature. Elles proviennent d'une extrapolation qui s'écarte à l'infini du domaine expérimental : elles peuvent donc s'écarter tout autant de la réalité.

On reproche parfois au mathématicien d'avoir une foi aveugle dans ses formules. C'est peut-être le reproche qu'il mérite le moins. Est-ce vraiment lui qui a une foi métaphysique inébranlable dans la valeur objective des constructions euclidiennes ? Il sait trop bien comment elles sont faites puisqu'il les a fabriquées lui-même, et il est prêt à les remplacer par d'autres peut-être meilleures. En tout cas, ce n'est pas ici qu'il faut le dire, dans cette Académie illustrée par Joseph de Tilly, — de Tilly, le continuateur de Gauss, l'émule de Riemann dans ses recherches de géométrie abstraite, le précurseur incontestable de la Relativité, même générale, par le rôle qu'il donne à la distance comme élément primordial de ses constructions.

Après tous ces préliminaires un peu longs, nous pouvons maintenant parler de la *Relativité restreinte.*

10. — Origine et sens physique de la Relativité restreinte (1)

Qu'est-ce que la Relativité restreinte ?

Tous ceux qui ont étudié les principes de la mécanique classique et, en particulier, le plus ancien d'entre eux, celui de Galilée ou de l'inertie, savent que ces principes ne s'appliquent que moyennant un choix convenable du système de référence. Un système où le principe d'inertie s'applique, est ce que l'on nomme un *système galiléen* ou inertique. On sait encore que si un système donné est galiléen, tout autre système en translation uniforme par rapport à lui, l'est encore. Mais nous ne sommes pas certains qu'il existe de système parfaitement galiléen dans l'Univers. A part cela, l'expérience nous fait reconnaître un système qui est à très peu de chose près galiléen, c'est un système défini par un trièdre ayant son sommet au centre de gravité du système solaire et orienté d'une manière invariable par rapport aux étoiles fixes : nous l'appellerons le *Solide stellaire*. Le Solide stellaire est donc le système galiléen fondamental et intangible fourni par la Nature, et les autres ne peuvent être définis qu'en relation avec celui-là.

Un système lié à la Terre ou simplement entraîné dans sa translation autour du Soleil, n'est pas galiléen. Cependant, dans bien des cas, il est permis de le considérer approximativement comme tel. Ainsi, si la durée de l'observation est suffisamment courte et le champ des observations suffisamment restreint, on peut considérer le mouvement de translation de la Terre comme uniforme et même négliger la rotation diurne. Les physiciens l'admettent, de fait, dans leurs expériences sur la vitesse de la lumière et l'électromagnétisme.

(1) Les deux ouvrages, me semble-t-il, que les non-mathématiciens liront avec le plus de fruit sont : *L'Espace et le Temps*, par É. Borel (Paris, Alcan) ; *Le Principe de la Relativité et les théories d'Einstein*, par L.-G. du Pasquier (Paris, Doin, 1922).

Le principe de la relativité restreinte consiste à affirmer que les lois de la nature sont les mêmes par rapport à tous les systèmes galiléens, non seulement les lois de la mécanique classique, mais aussi, ce qui ne se réalisait pas dans l'ancienne mécanique, les lois de la lumière et de l'électromagnétisme (1).

Toutes les expériences qui ont été tentées jusqu'ici pour mettre ce principe en défaut ont échoué. Jamais aucune expérience faite à l'intérieur d'un système galiléen n'a pu mettre en évidence son mouvement par rapport au solide stellaire.

Ces expériences, il est vrai, ne peuvent être réalisées que dans un système lié à la Terre. Mais, dans sa révolution annuelle, la Terre est emportée à travers le solide stellaire avec une vitesse de 30 kilomètres par seconde, et comme la direction de cette vitesse varie avec la position de la Terre sur son orbite, on peut admettre que les expériences faites dans nos laboratoires, sont faites dans des systèmes galiléens et, de plus, suivant l'époque de l'année, dans des systèmes galiléens différents.

Les plus célèbres de ces expériences sont celles de Morley-Michelson, d'où il résulte que la vitesse de la lumière est la même dans tous les sens pour tous ces systèmes galiléens. Les mêmes expériences ont été renouvelées depuis par d'autres physiciens, et cela à toutes les saisons de l'année, à toutes les heures du jour et de la nuit ; et,

(1) Cette propriété des espaces galiléens peut être généralisée dans un certain sens au point de vue de la mécanique ordinaire. On peut l'étendre à deux systèmes non galiléens en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, mais *sans rotation* par rapport au solide stellaire, ce qui est encore un privilège. (Voir dans l'*Introduction à la théorie de la relativité* de Galbrun, Paris, Gauthier-Villars, 1923, le chapitre sur la relativité des équations de la mécanique, p. 289-296.) Mais rien n'autorise à faire l'extension des principes de la relativité restreinte à ces systèmes non galiléens. On ne peut les relier sans contradiction par la transformation de Lorentz : la non-réciprocité des conditions du voyage en boulet en est la preuve suffisante.

depuis trente-sept ans, elles conduisent au même nombre pour la vitesse de la lumière. C'est pour expliquer ce résultat déconcertant que les théoriciens ont été conduits aux formules de la Relativité restreinte.

11. — Les deux postulats de la Relativité restreinte. — Définition du synchronisme

La théorie de la relativité restreinte pose les deux postulats suivants :

1° La vitesse de la lumière est une constante dans chaque système galiléen et la même pour tous ;

2° Aucune action ne peut se transmettre avec une vitesse supérieure à celle de la lumière (1).

Mais ces deux postulats appellent une discussion immédiate pour en découvrir le véritable sens.

Le second postulat assignant une vitesse de propagation limite, exclut la possibilité d'une action à distance, donc il s'oppose à la constatation physique d'une simultanéité absolue. Partant, il écarte l'existence d'un temps physique unique commun à tout l'Univers.

Mais alors, et ceci est assez troublant, le second postulat semble détruire le premier, qui exige la constance de la vitesse de la lumière.

En effet, tant que la simultanéité n'est pas définie, et elle ne l'est pas encore, la vitesse de la lumière ne l'est pas non plus. En effet, pour déterminer la vitesse d'un mobile entre deux points, il faut constater l'heure du départ et celle de l'arrivée à deux horloges installées aux deux bouts du parcours mais *synchrones*. Or, sans simultanéité, il n'y a pas non plus de synchronisme.

On ne peut sortir de cette impasse que par une convention.

(1) Le premier principe suppose implicitement le second, car il est impossible que la vitesse de la lumière reste la même pour un observateur qui pourrait acquérir une vitesse plus grande qu'elle.

Les principes dont nous disposons ne suffisent pas pour définir la vitesse de la lumière entre deux points différents. Tout ce que nous pouvons déterminer, grâce à eux, c'est la vitesse moyenne de la lumière sur un circuit fermé. Il suffit de disposer un ou plusieurs réflecteurs qui changent la direction d'un rayon lumineux pour lui faire décrire un tel circuit. Ceci fait, les heures de départ et d'arrivée se lisent au même endroit et à la même horloge, de telle sorte que la difficulté relative à la simultanéité ne se rencontre plus. Le résultat de l'expérience est le même pour tous les observateurs terrestres : la vitesse moyenne de la lumière sur un circuit fermé est la même pour tous les circuits et de 300.000 kilomètres par seconde (1).

Cette constatation nous suggère, pour en sortir définitivement avec la question de simultanéité, une convention si naturelle qu'elle a l'air de s'imposer.

Échelonnons, par la pensée, des horloges le long du circuit fermé. Notre intuition du temps ne nous fournissant pas le moyen de synchroniser nos horloges, passons-nous d'elle. Accordons simplement les horloges entre elles par la condition que la vitesse de la lumière soit constante tout le long d'un circuit fermé, ce qui est possible. Cette règle empirique nous permet de synchroniser, avec notre horloge personnelle, toutes les horloges liées au système, et alors la vitesse de la lumière est devenue constante dans tout le système. Tel est le sens exact du premier postulat.

Notre règle empirique est conventionnelle, mais ne contredira jamais notre intuition du temps, car elle ne fait que suppléer à cette intuition devenue défaillante.

Éclaircissons l'application de la règle par un exemple :

Il est midi à la montre de Pierre au moment même

(1) Dans la pratique, on ne fait l'expérience que sur un trajet aller et retour.

où il aperçoit un éclair dans un astre errant situé, je suppose, à 600.000 kilomètres de la Terre. Cet éclair s'est évidemment produit *à un certain instant sur l'astre.* Nous posons alors la question suivante : Quelle heure était-il à la montre de Pierre *au même instant* ?

Pierre est tout d'abord certain que l'éclair s'est produit avant qu'il l'ait vu, donc avant midi. D'autre part, il sait qu'un rayon lumineux parti de la Terre à midi moins 4″ et réfléchi sur l'astre, lui serait revenu à midi. Il s'est donc réfléchi sur l'astre moins de 4″ avant midi, et c'est précisément au moment même où l'éclair s'est produit. Pierre peut donc affirmer, sans aucun empirisme, que l'éclair s'est produit avant midi et moins de 4″ plus tôt. Personne ne mettra jamais en doute cette conclusion fondée sur la notion objective du temps. Mais, il reste une marge de 4″ dans laquelle le principe d'hérédité n'a plus de prise. Pour en sortir, Pierre *convient* que la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens, il coupe la marge par le milieu et décide *de son plein gré* que l'éclair s'est produit sur l'astre 2″ exactement avant que sa montre marquât midi.

Nous-mêmes, quand nous disons que la Lumière met tant de secondes pour nous venir de la Lune, tant de minutes pour nous venir du Soleil, tant d'années pour nous venir d'une étoile, nous sommes les humbles disciples de Pierre.

Mais, un voyageur cosmique entraîné dans une course vertigineuse à travers le Solide stellaire pourra trouver plus commode de prétendre que, sur la route du Soleil à la Terre, la lumière met deux fois plus de temps dans un sens que dans l'autre. Personne ne pourra lui prouver le contraire et nous ferions la même chose à sa place.

Comme on le voit par les explications qui précèdent, la marge dans laquelle la synchronisation de deux horloges fixées dans un système galiléen reste à la discrétion de l'observateur, est plus ou moins grande selon que les

deux horloges sont plus ou moins écartées l'une de l'autre : elle est exactement égale au temps qu'il faut à la lumière pour faire le trajet aller et retour. S'il s'agit d'un observateur terrestre qui veut synchroniser avec la sienne une horloge lointaine, la marge est de quelques secondes à la distance de la Lune, d'un bon quart d'heure à celle du Soleil et elle atteint des millions d'années si l'on s'écarte jusqu'aux plus lointaines nébuleuses connues.

Désormais, nous synchronisons les horloges et nous définissons la simultanéité avec une précision parfaite, mais cette définition est devenue artificielle.

La simultanéité n'exprime plus qu'une coïncidence entre deux indications d'horloges. Elle n'exprime plus une relation fondée sur l'intuition du temps, mais fondée sur les propriétés de la lumière. L'espace et le temps ont part égale dans sa définition ; leurs mesures sont devenues interdépendantes et inséparables. C'est ainsi que se constitue cet amalgame appelé *espace-temps* qui a scandalisé tant d'esprits mal informés et sur lequel nous aurons à revenir.

Considérons maintenant deux observateurs entraînés dans deux systèmes galiléens différents. La vitesse de la translation relative est inférieure à la vitesse-limite qui est celle de la lumière. Les deux observateurs se servent des mêmes étalons de longueur et de temps. Leur mètre et leur chronomètre à vibrations sont de construction identique, exactement comme il arrive quand un même observateur terrestre fait des expériences à deux époques différentes de l'année. Nos deux observateurs, ayant repéré chacun les points de son système, font les mêmes expériences sur la vitesse de la lumière. Encore un coup ils trouvent tous deux le même nombre pour cette vitesse.

Ajoutons à cela que des expériences estimées péremptoires prouvent que le transport lumineux n'est affecté ni

par le mouvement de la source ni par celui du laboratoire. Voici les physiciens acculés à cette conclusion paradoxale que si la vitesse d'un point mobile atteint celle de la lumière, ce point possédera la même vitesse apparente dans tous les observatoires galiléens. A première vue, cette invariance paraît antinomique. Est-il vraiment possible de relier les mesures de lieu et de temps, effectuées dans deux systèmes différents, par des formules générales conduisant à un pareil résultat ? Eh bien ! oui, c'est possible, mais ce n'est possible que d'une seule façon, par le système de relations linéaires connu sous le nom de *transformation de Lorentz* (1).

Cette transformation de Lorentz est déjà extrêmement intéressante par ses seules propriétés mathématiques ; elle l'est davantage par deux conséquences physiques qui font figure de paradoxe et que nous allons examiner.

12. — Le paradoxe de la contraction longitudinale

Le premier paradoxe créé par la transformation de Lorentz est la *contraction longitudinale* des solides en mouvement.

La géométrie se fonde sur les propriétés des solides, dont les dimensions restent, dit-on, *invariables*. Mais il est clair que l'expérience ne peut prouver que cette invariabilité soit *absolue* ; elle constate seulement que les solides de la nature conservent les mêmes dimensions les uns par rapport aux autres, de quelque manière qu'on les transporte dans l'espace : sous une forme plus précise, ce sont toujours les mêmes parties de deux solides que l'on peut amener à coïncider entre elles. Le mesurage d'une figure solide consiste à la décomposer en parties sur chacune desquelles le mètre peut être exactement appliqué. Si cette coïncidence est réalisée, il est évident

(1) Cette transformation est exposée dans la note p. 349.

que le mètre et la figure seront ou tous deux immobilisés ou tous deux animés du même mouvement.

Le géomètre relativiste adopte la géométrie euclidienne, avec son principe de mesurage, comme *géométrie statique.* Il s'en sert pour mesurer avec un mètre des figures immobilisées dans son système galiléen. Il repère ou définit ainsi tous les points de ce système au moyen de leurs coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires. Ces points, qui d'ailleurs n'ont d'autre existence que celle que leur confère ce procédé de repérage, constituent un espace euclidien. Le relativiste repère et mesure ensuite les corps *mobiles* dans cet espace *comme si c'était un espace absolu.*

Il suit immédiatement de ce point de vue que la *cinématique relativiste* prend un caractère subjectif, et que la mesure des corps en mouvement dans cet espace devient, pour une certaine part, conventionnelle. Qu'est-ce actuellement que la longueur d'une règle en mouvement ? C'est la distance des deux points de l'espace occupés par les deux extrémités de la règle *au même instant.* Or, ces deux points varient suivant la définition de la simultanéité, qui est subjective. Mais alors la géométrie statique n'est pas moins subjective que la cinématique, car les corps qui sont en repos pour un observateur sont en mouvement pour un autre.

Il n'y a donc rien de bien surprenant ni de scandaleux à ce que deux observateurs en mouvement relatif ne portent pas le même jugement sur les dimensions d'un même corps solide. Dans le fait, quand un solide se met en mouvement, l'observateur qui reste immobile et qui mesure le corps comme nous l'avons expliqué, juge que ses dimensions se réduisent dans le sens du mouvement. C'est ce phénomène (qui est distinct d'une appa-

rence optique) que l'on appelle la contraction longitudinale (1).

Cette contraction longitudinale est d'ailleurs si faible qu'elle est inaccessible à nos procédés de mesure tant que la vitesse du corps est d'un ordre inférieur à la vitesse de la lumière. Quoique la Terre ait une vitesse de 30 kilomètres à la seconde à travers le Solide stellaire, la réduction de son diamètre est à peine de 3 centimètres. Aucun procédé géodésique connu ne parviendrait à la déceler, et il ne faut pas oublier que l'observateur terrestre, emporté avec le mobile, ne doit pas l'observer du tout.

13. — Le paradoxe des temps multiples

Le second paradoxe entraîné par les formules de Lorentz, est celui de la multiplicité des temps.

Pierre et Paul, emportés respectivement dans les systèmes galiléens différents S et S', observent l'Univers et repèrent, chacun dans *son espace* et dans *son temps*, le même événement E. Un événement, par définition, est un phénomène qui affecte un point matériel à un instant déterminé : c'est un phénomène *instantané* et *punctiforme*, strictement localisé dans l'espace et dans le temps. Une étincelle entre deux points rapprochés, un geste de Pierre, un battement de cœur de Paul sont des événements dans ce sens-là. Donc Pierre et Paul observent l'événement E et le repèrent. Sous une forme analogique mais très exacte, on peut dire qu'ils *projettent* tous deux cet événement dans *leur espace* et dans *leur temps*. Pierre le repère dans son système S à l'aide de trois coordonnées x, y, z du point P de son espace où le phénomène a eu lieu, et d'une coordonnée de temps

(1) Le coefficient de contraction, $1 : \Lambda$, est calculé dans la note p. 350.

t qui est l'heure que marquait sa montre à l'instant où, d'après son estimation, le phénomène a dû se produire. Cette dernière détermination comporte, avons-nous vu, une part de subjectivité d'autant plus grande que le phénomène est plus éloigné. — Paul, de son côté, repère le même événement dans son système S′ avec trois coordonnées de lieu x' y', z' et une coordonnée de temps t'. Cette dernière est, pareillement, l'heure que marquait sa montre à l'instant où l'événement est arrivé *à son avis*.

Supposons que Pierre classe dans son temps deux événements E et E′ qui affectent des corps *très éloignés l'un de l'autre*, que Paul classe dans le sien les deux mêmes événements. Pierre et Paul mesurent chacun l'intervalle de leur temps qui s'est écoulé entre les deux événements ; ils trouvent des durées différentes. Il peut aussi arriver que les événements jugés simultanés par Pierre soient successifs pour Paul, ou bien encore que les deux observateurs rangent les deux événements dans un ordre inverse de succession. C'est en cela que consiste la *multiplicité des temps*.

Il est intéressant et instructif d'étudier, en particulier, les événements qui atteignent Paul lui-même et que nous appellerons les événements de la vie de Paul. Ce sont ses événements conscients, et, par conséquent, le temps t' que Paul leur assigne n'a rien d'artificiel ni d'empirique, c'est celui qui mesure sa propre durée psychologique.

Pour préciser les formules, nous supposerons que Pierre et Paul ont eu un événement commun : ils se sont rencontrés à minuit, qui est l'heure 0 à leurs montres, et ils comptent leurs temps respectifs en secondes à partir de cet instant initial. Leurs montres marquent les heures de 0 à 24.

Remarquons-le bien, les formules de Lorentz (1) n'éta-

(1) Voici la transformation de Lorentz :
Soient x, y, z, t les coordonnées du système S de Pierre ; x', y',

blissent entre les temps t et t' aucune relation indépendante du *lieu* où se produit l'événement repéré par les deux observateurs. Mais un événement de la vie de Paul se localise avec Paul lui-même, et alors la formule devient toute simple ; on a :

$$t = \Lambda t'.$$

Dans cette formule, Λ est un coefficient qui dépend de la vitesse relative des deux systèmes. Il est toujours > 1 et augmente avec la vitesse relative. Son excès sur l'unité ne devient appréciable que pour des vitesses comparables à celle de la lumière ; mais, dans tous les cas, t est $> t'$.

Supposons que la montre de Paul marque midi : c'est un événement de la vie de Paul. Pierre, en projetant cet événement dans son temps t, estimera qu'il s'est produit *plus tard*, par exemple à midi et demi.

Ainsi Pierre *dilate* la durée consciente de Paul en la projetant dans la sienne, et cela en vertu de son principe

z', t' celles du système S′ de Paul. Les deux systèmes d'axes sont en coïncidence à l'instant initial $t = t' = 0$ et Pierre et Paul sont alors à l'origine commune des deux systèmes. Le système S′ a, par rapport à S, une vitesse v dans le sens des x et des x'. On désigne par ω la vitesse de la lumière. La transformation est :

$$x' = \Lambda(x - vt) \qquad y' = y$$

$$t' = \Lambda\left(t - \frac{v}{\omega}x\right) \qquad z' = z \qquad \Lambda = 1 : \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$$

et réciproquement :

$$x = \Lambda(x' + vt), \qquad t = \Lambda\left(t' + \frac{v}{\omega}x'\right).$$

S'il s'agit d'un événement de la vie de Paul, on a $x' = 0$ et la dernière formule donne $t = \Lambda t'$.

Pour vérifier la *contraction longitudinale* d'une règle entraînée dans le système S′, où ses extrémités ont les abscisses fixes x'_1 et x'_2, on tire de la première formule du système, pour t constant,

$$x'_2 - x'_1 = \Lambda(x_2 - x_1), \quad \text{d'où} \quad x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\Lambda}.$$

Le coefficient de contraction est donc $1 : \Lambda$.

de projection, ou de la règle qu'il suit pour fixer la simultanéité entre les événements qui arrivent à Paul et ceux qui lui arrivent à lui-même.

C'est d'ailleurs absolument réciproque. Si Paul fixe à sa manière la simultanéité entre les actions de Pierre et les siennes, il dilate la durée consciente de Pierre exactement dans le même rapport.

Ce que nous venons de constater dans la représentation que Pierre se fait de l'existence de Paul, nous le retrouvons dans la représentation que Pierre se fera de l'évolution d'un corps quelconque en mouvement dans l'Univers.

Chaque corps a son évolution et son temps propres. La durée de ce *temps individuel* est mesurée par un chronomètre vibrateur, lié au corps, et qui le suit dans tous ses mouvements. Si Pierre, conformément à son principe, projette cette durée sur la sienne, il en fait une carte à une certaine échelle, une image qui en altère généralement les dimensions.

Si le mouvement du corps n'est pas galiléen, les lois de cette altération relèvent de la relativité générale et la carte dressée par Pierre sera à échelle variable. Si le mouvement est galiléen mais différent de celui de Pierre, la carte est à échelle constante $\Lambda > 1$ et l'image que Pierre se donne de la durée du corps est toujours plus grande que nature.

Cette observation suffit, à elle seule, pour montrer qu'il est impossible de partager les durées des corps, ou encore les durées conscientes des divers observateurs (il n'y a aucune différence), en tranches superposables limitées par des simultanéités absolues. La contradiction est irréductible (sans sortir de la relativité restreinte) dès qu'il y a trois systèmes différents (1). La multiplicité des temps est, par conséquent, inévitable.

(1) Supposons trois voyageurs galiléens, Pierre, Paul et Jacques, situés sur une même droite indéfinie. Pierre est supposé immobile,

14. — Le voyage en Boulet

La multiplicité des temps prend une forme particulièrement saisissante si l'on admet qu'un observateur puisse passer d'un système galiléen dans un autre. Cette hypothèse s'écarte très légèrement des conditions strictes de la Relativité restreinte ; mais cette objection ne peut infirmer les conclusions logiques que l'on tire du fameux *Voyage en Boulet*, imaginé par M. Langevin ; nous verrons pourquoi tout à l'heure.

Un boulet lancé de Terre par l'artilleur Pierre, avec une vitesse inférieure d'un vingt-millième environ à celle de la lumière, emporte Paul dont l'endurance est à toute épreuve. Le boulet rencontre une étoile, rebondit et ramène l'intrépide Paul à la Terre avec la même vitesse. Paul ayant vieilli de deux ans, par exemple, quand il sortira du projectile, trouvera que Pierre est mort depuis plus d'un siècle et que c'est de deux cents ans qu'a vieilli notre globe.

Peu importe, pour l'instant, la question de savoir si cette aventure est réalisable ou ne l'est pas. Oui ou non, la conclusion est-elle conforme aux principes de la Relativité restreinte ?

mais Paul et Jacques voyagent avec des vitesses égales et de sens contraires, ce qui donne lieu à trois rencontres. Nous supposerons qu'elles se font dans l'ordre suivant : Paul rencontre Pierre, puis Jacques ; enfin Jacques rencontre Pierre. On peut supposer que Paul compte une heure à sa montre entre ses rencontres avec Pierre et Jacques, que Jacques compte une heure à la sienne entre ses rencontres avec Paul et Pierre : alors en vertu des formules de Lorentz, ou de la dilatation des temps, Pierre compte nécessairement plus de deux heures à sa montre entre ses rencontres avec Paul et Jacques. Il est donc impossible de partager la durée de Pierre en deux tranches superposables aux tranches déterminées par les rencontres dans les durées de Paul et de Jacques.

Le problème du voyage en Boulet de M. Langevin consiste à substituer brusquement Paul à Jacques au moment de la rencontre des deux voyageurs.

Or, il est manifeste que oui.

C'est la Nature et non l'homme qui impose à un système physique le privilège galiléen. Il existe dans l'Univers un système galiléen fondamental : le Solide stellaire. Il n'y a pas d'autres systèmes galiléens que ceux qui sont en translation uniforme par rapport à celui-là. Nous n'y pouvons rien changer.

La Terre qui se déplace fort paresseusement dans le Solide stellaire, est l'origine d'un système d'axes très sensiblement galiléen pendant toute la durée du voyage. Il n'en est pas de même du projectile. Il passe par trois crises ou phases non galiléennes : projection au départ, rebondissement sur l'étoile, arrêt final sur la Terre. Mais il est galiléen pendant le trajet de la Terre à l'étoile, il le redevient pendant le trajet du retour ; et ces deux systèmes galiléens sont différents.

Les trois crises sont momentanées et, en tout cas, leur durée est indépendante de celle du trajet. On peut supposer l'étoile assez loin pour que l'influence de la durée des crises soit négligeable devant celle du trajet : on peut donc éliminer les crises du raisonnement sur les durées.

Pendant le voyage aller, Paul est un observateur galiléen. Au témoignage de sa montre, il met exactement un an pour atteindre l'étoile, mais l'observateur sublunaire, qui repère cette traversée dans son temps terrestre, estimera qu'il en faut Λ fois, c'est-à-dire cent fois davantage. De même, le retour dure un an à la montre de Paul, mais cent au jugement des Terriens qui repèrent ce retour.

L'arrivée de Paul est, comme son départ, un événement commun au projectile et à la Terre.

Quand Paul remet le pied sur la Terre, elle a décrit, depuis le départ, deux cents fois sa révolution autour du Soleil, tandis que Paul, toujours jeune, n'a vieilli que de deux ans : sa montre, à supposer qu'elle marque les dates, en fera foi.

Il n'y a pas de réciprocité : elle serait évidemment contradictoire. La Terre est restée attachée au même système galiléen : le Solide stellaire ; ses habitants n'ont jamais eu à changer leur méthode de repérage du projectile. Le projectile, au contraire, est passé d'un système galiléen dans un autre, et le choc a complètement brouillé les moyens de repérage de Paul qui, dès lors, s'est trouvé désorienté. Il est, en effet, passé d'un système où la durée du retour sera évaluée à 19999 ans, dans un autre où la durée du voyage aller est déjà évaluée au même nombre (1).

D'ailleurs, le résultat n'a rien d'étonnant et l'on peut discerner où gît la clef du mystère.

Pierre et Paul ont emprunté tous deux leurs procédés de mesure à la radiation lumineuse : leur étalon de longueur est la *longueur d'onde* ; leur étalon de temps, c'est la *période*. Tel est le principe de la Relativité (2). Pierre et Paul, s'ils se retrouvent jamais, ont fait sur la lumière des expériences différentes.

Les physiciens ne reprocheront sans doute pas à Pierre et à Paul d'adopter des unités qu'ils ont eux-mêmes

(1) Supposons que l'étoile et la Terre soient fixées au Solide stellaire. Par suite de la contraction longitudinale, la distance entre ces deux corps est cent fois plus petite pour l'observateur entraîné dans le projectile que pour l'observateur terrestre. Par contre, la vitesse relative des observateurs est la même pour les deux observateurs. On retrouve par cette voie la même conclusion : la durée du voyage est cent fois plus courte pour l'un que pour l'autre.

(2) L'invariance de ces étalons est liée aux équations de Maxwell. L'argument le plus fort en faveur de la Relativité restreinte est que la transformation de Lorentz laisse invariantes les équations de l'électromagnétisme dites de Maxwell. C'est ainsi que la Relativité étend au domaine électromagnétique le privilège des systèmes galiléens. Or, l'onde lumineuse correspond à une solution à *période* constante des équations de Maxwell, donc invariante pour les divers observateurs ; d'autre part, ceux-ci prennent tous comme étalon de longueur la vitesse de la lumière, donc la *longueur d'onde* (qui est le produit de cette vitesse par la période) est invariante aussi. (Pour ces questions, voir Galbrun, *Introduction à la théorie de la relativité*, Paris, Gauthier-Villars, 1923.)

préconisées depuis longtemps. Si, par hasard, ils étaient relativistes sans le savoir, ils ne s'en prendront qu'à eux-mêmes. Mais, ce qui est plus surprenant et digne de réflexion, c'est que les solides aussi bien que les corps vibrants se plient ainsi, si l'on peut dire, *au caprice* de la vibration lumineuse et en épousent automatiquement les dimensions dans l'espace et dans le temps. On admet même, dans le précédent épisode, que le cœur humain, considéré comme le balancier de la vie, règle ses battements sur la même norme que les autres vibrateurs, et que le flux de la vie consciente s'écoule, comme celui du temps, au rythme imposé par la vibration lumineuse.

En définitive, que faut-il penser des conséquences imprévues du voyage fantastique de Paul ?

Sans doute, que c'est une exagération outrancière de résultats d'expériences encore bien fragiles ; et que les physiciens, qui se sont évidemment fait un malin plaisir d'y insister, avaient le secret dessein de remplir d'admiration les néophytes et d'exaspérer le dogmatisme métaphysique.

Il n'en demeure pas moins certain que si Paul, enlevé à travers le ciel dans le char de quelque fée très puissante, avait mesuré le temps avec un chronomètre compteur de vibrations lumineuses, il aurait trouvé pour son voyage une durée bien plus courte que celle mesurée par un camarade qui l'aurait patiemment attendu sur Terre. Si quelqu'un, après cela, est bien convaincu que la vie consciente se mesure à la même aune, il en tirera, sans doute, la conclusion qui s'impose ; mais il se ferait infailliblement passer pour un fou s'il prétendait imiter l'exemple de Paul et revenir, rajeuni, ne fût-ce que de la lune (1).

(1) Dans un ouvrage récent : *Durée et Simultanéité* (Paris, Alcan), M. Bergson a contesté la multiplicité des temps et les conséquences logiques du voyage en Boulet. Mais l'illustre académicien commet plusieurs erreurs de principe dans l'interprétation de la Relativité

15. — L'espace-temps

La notion d'*espace-temps* est encore une de celles qui ont soulevé bien des protestations superflues. Nous allons donc expliquer en quoi consiste cette union indestructible de l'espace et du temps qui est affirmée par les physiciens relativistes.

Nous ne le contestons aucunement, jusqu'à nos jours tout le monde pensait que l'espace et le temps avaient une existence indépendante et demeuraient identiques à eux-mêmes pour tous les observateurs quels qu'ils fussent. La Relativité contredit cette manière de voir, mais elle ne contredit pas l'intuition pour cela, parce que la divergence porte, comme nous allons le montrer, dans un domaine qui n'est pas du ressort de cette faculté précieuse.

La Relativité, en effet, n'établit aucune liaison entre le temps et l'espace tant qu'il s'agit seulement d'*analysis situs*, c'est-à-dire tant qu'il s'agit de la situation relative

restreinte. D'abord en l'appelant *Relativité complète* (chap. II), il la confond avec *Relativité générale* et c'est sur cette Relativité contradictoire qu'il raisonne tout au long du livre. Il oublie que la Relativité restreinte ne s'applique qu'à des systèmes *privilégiés*, dits galiléens, qui sont donnés par la Nature et non par le bon plaisir de l'observateur.

Ensuite (le voyage en Boulet, pp. 102 à 109), il méconnaît tout autant la *signification physique* des temps t et t' que Pierre et Paul, entraînés dans deux systèmes S et S′, attribuent au même événement ; et il ne paraît pas savoir que ces temps t et t' sont lus respectivement par Pierre et Paul à leur montre personnelle. Se plaçant au point de vue de Pierre *référant*, il considère le *temps raccourci* t' que Paul lit à sa montre comme le temps de Paul *référé*, tandis que c'est le temps même de Paul *référant* (celui que M. Bergson appelle vécu et conscient). S'il y a un temps fictif, c'est le temps allongé que Pierre attribue à Paul, et c'est son propre temps t à lui, Pierre, observateur *référant*. C'est exactement le contraire de ce que dit M. Bergson. Malgré toute l'admiration que nous inspire le grand talent de M. Bergson et le respect que nous professons pour son autorité incontestée, il nous est impossible d'accepter quoi que ce soit de ses thèses sur la Relativité.

des corps dans l'espace ou de l'ordre des événements qui se succèdent sur l'un d'eux. Elle ne bouleverse les idées reçues qu'à partir du moment où il est question de *mesurer*, c'est-à-dire à partir du moment précis où l'on sort du domaine proprement intuitif.

Rappelons-le encore. Nos intuitions premières sur le temps psychologique et l'espace représentatif sont *qualitatives* : elles ne font appel qu'aux principes de distinction et de classement. La théorie de la mesure est bien postérieure et va bien au delà. Elle suppose des expériences sur les solides bien autrement complexes et sujettes à l'interprétation que les données immédiates et grossières de la conscience sur lesquelles s'échafaude l'espace intuitif. Elle ne relève nullement de l'intuition, ni surtout, grand Dieu, du bon sens. On peut dire sans exagération que la majorité des personnes cultivées se fait, sur les premiers principes de la géométrie métrique, des idées plus ou moins fausses.

Quoi qu'il en soit, les défenseurs attitrés du bon sens peuvent se rassurer. Même dans le domaine délicat de la mensuration, la Relativité respectera leurs vieilles habitudes ; elle ne pourrait les troubler que sur un terrain inaccessible aux spéculations vulgaires et aux expériences des gens sages et pratiques.

En effet, tant que les mensurations ne s'étendent pas jusqu'aux astres, et tant que les vitesses des mobiles ne dépassent pas ce que le « sens commun » peut « raisonnablement » leur permettre, un seul espace suffit à toute chose et un seul temps suffit à tout le monde. Sans doute, au point de vue physique, n'est-ce là qu'une approximation, mais c'est bien une réalité, comme nous le savons, pour la conscience, incapable de percevoir le désaccord.

Tout change et la difficulté apparaît si le mesurage prétend embrasser l'Univers tout entier.

Alors, plus de temps absolu, mais autant de temps que

de corps distincts (et pas trop gros) dans l'Univers ; plus d'espace unique, mais autant d'espaces métriques différents que d'observateurs galiléens, qui en construisent les schémas euclidiens.

Chaque observateur galiléen se construit, pour son usage personnel, un espace en tout semblable à celui du non-relativiste et tout aussi distinct du temps. Mais quand il projette dans cet espace et dans son temps les événements du monde extérieur, l'image qu'il se fait de l'Univers n'est pas superposable à celle obtenue par un autre observateur. C'est pour cela que nous disons que cette représentation est *subjective*.

Mais il y a plus.

Entre les espaces construits par deux observateurs de systèmes différents, il est impossible d'établir une correspondance *point par point* qui soit *invariante* (ou *stable*) dans le temps. En effet, la transformation de Lorentz ne pose, entre les points des deux espaces, aucune relation indépendante du temps. Elle ne pose pas davantage de relation indépendante du lieu entre les temps des deux observateurs, et, par conséquent, il n'existe pas non plus, entre ces deux temps, de correspondance *instant par instant* qui soit *invariante* dans l'espace.

Il faut en conclure que les constructions métriques de temps et d'espace *séparés* sont propres à chaque observateur et *intransmissibles* de l'un à l'autre. C'est pour cela que nous disons que ces constructions séparées sont subjectives, ou encore qu'elles n'ont ni objectivité ni réalité et, par là, nous ne voulons pas dire autre chose que ce que nous venons d'expliquer (1).

Pour trouver des éléments métriques qui soient objectifs, c'est-à-dire *invariants* ou *transmissibles* d'un obser-

(1) Je ne conteste nullement aux philosophes le droit de donner à ces termes un sens différent. Le tout est de s'entendre. Mais les physiciens s'entendent mieux entre eux que les philosophes.

vateur à l'autre, il faut les chercher dans le *continuum* à quatre paramètres (ou dimensions) formé par la réunion des quatre coordonnées métriques de l'espace et du temps, et que l'on nomme pour cela *espace-temps*. Quand on affirme que, seul, l'espace-temps a une réalité, on entend par là que, seul, il reste identiquement *le même* pour les divers observateurs.

Les points de l'espace-temps, c'est-à-dire les éléments définis par un système de valeurs des quatre paramètres x, y, z, t, sont *objectifs* car ils se transmettent d'un observateur à l'autre par les formules de Lorentz.

Mais l'*invariant fondamental* qui donne à la construction de l'espace-temps son objectivité métrique, c'est l'*écart* de deux événements donnés.

Nous allons en donner la définition.

Soient E et E′ deux événements observés dans un laboratoire galiléen. L'observateur les repère en deux points P et P′ de son espace et à deux instants t et t' de son temps ; il estime que la distance des deux événements dans l'espace est PP′ (1) et que leur distance dans le temps est $t' - t$; ces deux appréciations sont subjectives.

Supposons, pour simplifier, que l'observateur ait pris la vitesse de la lumière pour unité de longueur. Le carré $\triangle^2$ de l'*écart* des deux événements est, par définition, la différence des carrés de leurs distances dans l'espace et dans le temps. On a donc :

$$\triangle^2 = (t' - t)^2 - (\mathrm{PP}')^2.$$

Cette grandeur n'est plus subjective.

En effet, elle est invariante par la transformation de Lorentz et, par conséquent, elle est la même quel que soit l'observateur galiléen qui ait pris les mesures. Nous

(1) Si les coordonnées de P et P′ sont (x, y, z) et (x', y', z'), on a :

$$(\mathrm{PP}')^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

en concluons que l'*écart* est une mesure *objective* ou *réelle* dans le sens que nous avons strictement précisé.

L'espace-temps, disent les mathématiciens, est un espace à quatre dimensions. Les termes d'« espace » et de « dimension » n'ont ici qu'un sens analogique, mais, au point de vue logique, l'analogie peut aller jusqu'à l'identité.

L'écart de deux événements dans l'espace-temps correspond à la distance de deux points dans l'espace euclidien ; il est aisé de s'en rendre compte.

Dans un espace euclidien, on peut définir un procédé de repérage de tous les points qui soit indépendant de l'observateur. Il suffit de prendre comme points de repère quatre points particuliers du système formant les sommets d'un tétraèdre. Alors tous les autres points du système sont entièrement définis par leurs quatre distances aux points de référence.

De même, dans l'Univers en perpétuelle évolution, on peut situer complètement tous les événements dans l'espace-temps, en repérant chacun d'eux par les cinq écarts qui le séparent de cinq événements particuliers choisis comme événements de référence.

Cette construction, *identique pour tous les observateurs*, met bien en lumière que, l'espace et le temps étant cependant tous deux subjectifs, l'espace-temps ne l'est plus.

16. — Les objections

L'étude que nous avons faite ne convertira pas les adversaires de la Relativité, nous en sommes bien convaincu. Leurs objections sont cependant fragiles et il n'est pas difficile d'en démasquer la faiblesse. J'ai précisément rencontré un anti-relativiste et voici ce qu'il me disait :

— Ce qui m'étonne, c'est que des gens intelligents puissent se laisser éblouir par des théories aussi saugrenues que les vôtres et que leur absurdité ne crève pas les yeux. Tenez : vous prétendez que la vitesse de la lumière ne peut pas être dépassée. Votre postulat ne résiste pas à l'examen. Supposez deux mobiles animés de vitesses de sens contraires et égales toutes deux aux deux tiers de la vitesse de la lumière ; vous voilà déjà confondu : la vitesse relative des deux mobiles atteindra les quatre tiers de la vitesse de la lumière et, par conséquent, la surpassera.

Et je lui répondais :

— Pure illusion. Les vitesses ne se composent pas en mécanique relativiste comme dans la mécanique classique qui suppose le temps absolu. La nouvelle loi de composition ne conduit pas à une vitesse supérieure à celle de la lumière (1). Votre objection se retourne même contre vous, car la nouvelle loi est la seule qui soit d'accord avec les faits : elle rend exactement compte de l'entraînement partiel de la lumière par un courant d'eau, mis en évidence dans l'expérience de Fizeau, et qui était resté jusqu'ici inexplicable (2). C'est même une des confirmations expérimentales les plus impressionnantes de la Relativité et je vous suis reconnaissant de m'avoir fourni l'occasion de la signaler.

— Soit, ripostait mon adversaire, j'admets que votre théorie ne se contredise pas elle-même, mais elle heurte mon sens intime. Rien ne peut entraver le vol de ma pensée. Mon esprit se transporte, instantanément et

(1) Si deux corps sont mobiles avec des vitesses de même sens, l'un avec la vitesse v, l'autre avec la vitesse relative v' par rapport au premier, la vitesse absolue de ce dernier sera :

$$\frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{\omega^2}},$$

où ω est la vitesse de la lumière.

(2) V. Galbrun, *Introduction*, pp. 376-377.

sans effort, jusque dans ces lointaines nébuleuses dont la pâle lueur met, dites-vous, des millions d'années pour nous parvenir. Si mon esprit devance vos courriers, pourquoi une radiation suffisamment subtile n'en pourrait-elle faire autant ?

— Comparaison n'est pas raison, répliquais-je. Vous vous transportez par la pensée dans Sirius, par exemple : qu'est-ce que cela veut dire ? Que vous faites surgir devant votre esprit une image plus ou moins vague, tirée de votre imagination ou de vos souvenirs, et qu'il vous plaît de décorer du nom de Sirius. Y êtes-vous allé pour si peu ? Ma pensée à moi, elle se transporte, non moins aisément, dans l'avenir. J'assiste, en esprit, à la séance de l'année prochaine. J'en ai même une vue beaucoup plus claire que celle que vous vous faites de Sirius. Que prétendez-vous en conclure ? Croyez-moi : le vol de votre pensée est un vol puissant, je n'en doute pas ; mais ce n'est qu'une image, c'est même une image un peu usée, et, ce qui est pire, c'est un mauvais argument.

— Peu importe, reprend l'antirelativiste ; pour moi, la simultanéité est un absolu. Le nier, c'est braver le bon sens, détruire les bases de la métaphysique, saper le principe de contradiction. — Une chose existe ou n'existe pas. Dire : telle chose existe, c'est affirmer qu'elle existe *dans ce moment-ci*, car si elle n'existe pas dans ce moment-ci, elle n'existe pas. Je ne sors pas de là.

— Vous sortez tout au moins de la question, répliquai-je encore. Vous faites de la métaphysique et la Relativité ne relève que de la physique. Peu nous chaut qu'il y ait simultanéité absolue si nous ne savons pas la déterminer. Quel moyen avez-vous de le faire ? Nous autres, notre ambition est modeste, nous cherchons le meilleur moyen de coordonner les lectures que nous faisons sur nos instruments, rien de plus. Si vous avez un meilleur procédé que le nôtre à proposer, nous l'accepterons des deux mains. Mais, sans vous faire de tort, nous n'y comptons pas.

Nous avons de bonnes raisons de croire que tous les métaphysiciens de la terre mis ensemble, n'arriveraient pas à améliorer d'une seconde par siècle la marche de nos chronomètres. Laissez-les donc à leurs spéculations transcendantes. Leur noblesse, dit Aristote, est de ne servir à rien (1).

Si cependant vous tenez à mon opinion sur l'existence ou la non-existence, je vous dirai très franchement que votre dilemme ne m'émeut pas. Je ne trouve, pour ma part, ce que vous appelez « ce moment-ci » que dans mon présent psychologique, ou, si vous le préférez, dans mon état de conscience. Quand je dis qu'une corps existe « dans ce moment-ci », je conçois que ce corps et moi nous puissions entrer en communion immédiate, comme ce serait le cas pour une prise de contact. Si cette prise de contact est contraire aux lois de la nature, l'expression n'a plus, pour moi, qu'un sens conventionnel, à moins qu'elle n'en ait plus du tout, ce qui est bien possible.

Quand vous dites que deux corps existent « simultanément» à tel instant, vous affirmez, n'est-ce pas ? l'existence d'une relation entre eux. Or, de deux choses l'une : ou bien vous trouvez cette relation dans les phénomènes, ou bien vous la trouvez ailleurs. Si c'est dans les phénomènes, je ne demande pas mieux. Mais dites-moi alors en quoi elle consiste et à quoi elle se reconnaît. Si ce n'est pas dans les phénomènes, où serait-ce donc ? Serait-ce, par hasard, dans le temps lui-même ? Mais c'est faire

(1) Le mot est cité par J. Maritain (*l'Antimoderne*, édit. de la Revue des Jeunes, Paris, p. 254). Sur ce point, philosophes et mathématiciens se rencontrent et peuvent se donner la main : les mathématiques, dit Gauss, n'ont d'autre but que l'honneur de l'esprit humain. D'ailleurs, les mathématiques pures, telles qu'on les entend depuis un siècle, appartiennent à l'ordre métaphysique : elles ne relèvent que de l'intelligence, n'empruntant au monde physique que des modèles et non leur objet. On ne doit pas oublier que l'auteur de cet article est un mathématicien pur : quand il parle en physicien, c'est une fiction de circonstances.

du temps une entité en soi, une manière de substance régissant l'Univers et lui imposant ses lois, une sorte de conscience absolue qui penserait le monde. Pour ma part, je ne vois là qu'une personnification naïve, un anthropomorphisme irréfléchi, naturel peut-être à un esprit ingénu, mais indigne de fixer un instant la pensée du philosophe.

— C'est votre avis, reprend mon interlocuteur, mais revenons aux faits. Supposons qu'un physicien, puisque vous n'avez point de confiance dans les philosophes, supposons qu'un physicien découvre cet agent ultra-rapide dont vous prétendez proscrire l'existence. Vous n'en niez point la possibilité, puisque l'existence d'une vitesse-limite n'est qu'un « postulat », et je vous sais gré de le reconnaître. Eh bien, si le postulat est faux, vous voilà en possession d'un messager qui arrive avant de partir, vous voilà doué du don de prophétie. Oui, monsieur, prophète, malgré vous ! ce sont les formules de Lorentz qui vous y condamnent, et vous ne les récuserez pas.

Eh bien ! oui, qu'arriverait-il si l'on découvrait un agent plus rapide que la lumière ? On n'en conclurait certainement pas, comme des adversaires mal intentionnés veulent nous le faire dire, que cet agent arriverait avant de partir et divulguerait des messages prophétiques. Non, il permettrait seulement de restreindre *la marge* dans laquelle la synchronisation des temps est restée empirique. Il prouverait vraisemblablement que les horloges des relativistes sont mal réglées et ne concordent pas entre elles, et la théorie de la relativité serait probablement renversée. Il est possible après tout que cette théorie soit fausse ; mais si elle disparaît un jour, ce sera, je pense, pour une raison moins invraisemblable que celle dont on prétend nous embarrasser.

En attendant, ce jour-là n'est pas encore venu. La théorie de la relativité restreinte a les reins solides ;

c'est actuellement la seule qui rende compte des phénomènes lumineux et électro-magnétiques. Sa belle ordonnance et ses principes harmonieux séduisent les mathématiciens. Mais il est encore trop tôt, beaucoup trop tôt, pour asseoir un jugement définitif sur le témoignage de l'expérience. L'enthousiasme un peu illuminé de quelques-uns de ses adeptes est plutôt de nature à lui faire du tort parmi les esprits pondérés. La généralité de ses principes devance encore trop l'expérience, enfermée comme elle l'est dans des limites très restreintes, des systèmes très particuliers et des conditions encore trop énigmatiques. La vraie sagesse est dans l'expectative et le doute est toujours permis.

Pour moi, je ne suis pas encore de ceux qui ont jugé définitivement ou qui ont la foi. Mais je fais crédit aux physiciens : tôt ou tard, ils tireront la chose au clair. Il y a certainement une part de vérité dans la relativité. Quelle est-elle ? Nous le saurons un jour, mais le jour seulement où nous verrons où commence l'erreur, car la Nature est un sphinx qui ne livre jamais son secret qu'à demi. S'il laisse parfois deviner ses énigmes, c'est pour en proposer d'autres à notre perspicacité et orienter nos efforts dans une voie nouvelle à la recherche de la vérité.

Note additionnelle [1]

L'article précédent reproduit exactement le discours que nous avons eu l'honneur de prononcer à l'Académie royale de Belgique. Mais nous disposons ici d'un peu plus de place. Nous en profitons donc pour ajouter quelques réflexions complémentaires.

1.

Beaucoup de personnes rencontrent des difficultés dans l'intelligence des principes de la Relativité restreinte et cela provient de ce qu'ils attribuent aux termes d'*équivalence* entre systèmes galiléens, de *réciprocité* entre observateurs différents, un sens inexact ou trop absolu.

Pour comprendre la portée exacte de la Relativité restreinte, il suffit de remonter à ses origines. C'est une théorie *physique*, créée par Lorentz et, *dans son contenu physique*, elle lui est due tout entière. Minkowski ni Einstein n'y ont absolument rien ajouté ni retranché *qui puisse être l'objet d'une vérification expérimentale*. Les distinctions sont d'ordre exclusivement *métaphysique*. Toute difficulté de la théorie einsteinienne qui ne se présenterait pas dans celle de Lorentz provient, on peut l'affirmer, de la mésintelligence des principes de la théorie d'Einstein.

Plaçons-nous donc d'abord au point de vue de Lorentz. Voici ses hypothèses :

Il existe un espace et un temps absolus.

L'espace absolu est défini par l'éther. L'éther doit être conçu comme un solide illimité dont les points ont une existence réelle et définissent des positions absolues dans l'espace. C'est un vaste cristal qui transmet les vibrations lumineuses avec la même vitesse absolue dans tous les sens. Il définit un système galiléen, théoriquement privilégié, et les autres systèmes galiléens sont définis par rapport à lui.

Le voyageur terrestre, s'il admet cette conception, s'aperçoit immédiatement qu'il n'est pas immobile dans ce milieu ou dans cet espace absolu. L'aberration lui prouve, en effet, que la vitesse dont il est animé change constamment de direction dans l'éther. Mais quelle peut bien être cette vitesse absolue à travers l'éther ?

Si l'observateur possédait des étalons absolus de longueur et de temps, quelques mesurages sur la vitesse de la lumière suffiraient pour résoudre cette question. Mais l'expérience est négative. Rien ne décèle ce que l'on a appelé, par comparaison, le *vent d'éther*.

Il n'y a que deux manières d'en sortir : sacrifier l'invariance des étalons ou sacrifier la solidité de l'éther. Lorentz sacrifie les étalons pour sauver la solidité de l'éther et, avec elle, l'espace et le temps absolus ; et, contrairement à tout ce que l'on aurait prévu, il y a réussi.

Il imagine que les étalons de longueur et de temps se déforment dans un

(1) Revue des Questions scientifiques, 4e série, t. 5 (1924, 1), p. 366.

système galiléen en mouvement absolu. La loi de cette déformation s'exprime par les formules qui portent son nom et, pour lui, la *contraction longitudinale* et le *ralentissement du temps* sont de véritables réalités physiques. Il n'y a de mesures vraies ou absolues que celles qui sont prises par un observateur immobilisé dans l'éther, les autres sont des mesures *faussées*.

Cette hypothèse suffit pour étendre à tous les systèmes galiléens la constance apparente de la vitesse de la lumière et l'invariance des équations de l'électromagnétisme.

En quoi consiste donc l'équivalence de deux systèmes galiléens au point de vue des observations ? En ceci, exclusivement : on peut, dans deux systèmes galiléens différents, placer des corps présentant les mêmes apparences et instituer sur eux des expériences qui présenteront elles aussi exactement les mêmes apparences dans chacun des systèmes respectivement.

Supposons que Pierre et Paul instituent, chacun dans son laboratoire, la même expérience. L'expérience de Pierre paraîtra déformée à Paul, mais celle de Paul paraîtra déformée à Pierre et cela exactement de la même façon. Il y a réciprocité d'un laboratoire à l'autre, mais entre des expériences semblables et semblablement placées.

Pierre et Paul veulent mesurer la longueur d'onde de la lumière rouge de cadmium. Chacun d'eux opère sur une source immobilisée dans son laboratoire ; ils trouvent tous deux la même longueur d'onde. Par contre, la source de Pierre paraît peut-être bleue à Paul et, si Paul mesure la longueur d'onde de la lumière du cadmium émise par son voisin, il trouvera la longueur d'onde de la lumière bleue.

Si les expériences de Pierre et de Paul portent sur l'Univers, il n'y a plus entre leurs observations aucune sorte de réciprocité.

2.

Revenons encore sur le voyage en boulet de Paul, effectué dans les conditions stipulées dans le discours précédent.

Les conséquences de ce voyage n'ont rien qui puisse surprendre le *logicien* dans l'hypothèse de Lorentz.

La Terre est supposée animée d'un mouvement uniforme de direction donnée dans l'éther, et Pierre vit, par conséquent, sur la Terre un temps *ralenti* par rapport au temps absolu. Paul part dans son Boulet. Supposons que ce soit en sens contraire du mouvement absolu de Pierre et moins vite que lui. Le temps de Paul sera moins ralenti que celui de Pierre. Paul revient vers la Terre, sa vitesse absolue dépasse celle de Pierre, son temps se ralentit davantage que celui de Pierre. Cette fois Paul retarde donc sur Pierre, mais il y a plus que compensation avec le gain fait à l'aller. Tout compte fait, Paul retarde et a vécu moins longtemps que Pierre.

Pierre et Paul peuvent-ils discerner, entre eux deux, celui dont la vitesse absolue a changé au cours du voyage ? Sans doute qu'ils le peuvent. C'est Paul qui a rebroussé chemin, ce ne peut être que lui : toutes les lois physiques l'exigent.

Aucun cataclysme universel n'a modifié l'aspect de l'Univers aux regards de Pierre. Pour Paul, c'est bien le contraire. A l'instant même que sa vitesse absolue a changé, l'Univers s'est transformé tout entier sous ses yeux. Instantanément, l'aberration déplace les constellations dans le ciel ; instanta-

nément, les étoiles colorées changent de teintes ; instantanément, leurs spectres sont modifiés. Paul va-t-il dire que le ciel étoilé s'est mis en marche tout d'une pièce ? Il n'a même pas cette alternative. C'est d'avance et à des instants différents que les étoiles auraient dû se mettre en branle, instants calculés avec une précision mathématique de façon que toutes ces images différentes transmises à travers l'espace viennent atteindre l'œil de Paul au même instant. Bien plus, cette explication déraisonnable devient elle-même contradictoire s'il s'agit de satisfaire deux observateurs différents. C'est bien Paul qui a seul changé de situation vis-à-vis de l'éther ; personne assurément n'en peut douter.

3.

Poussons encore un peu plus loin notre analyse du voyage en boulet. Mais, pour plus de clarté, donnons à Paul des compagnons de route.

Paul et son camarade Jacques quittent la Terre en même temps et avec la même vitesse dans deux boulets différents. Ils voyagent de conserve jusqu'à l'étoile. Mais Jacques passe à côté d'elle et continue indéfiniment sa route dans l'espace. Il suit des yeux le retour de Paul à la Terre. Quelle durée attribue-t-il à ce retour ?

La réponse est facile. Le départ et le retour de Paul sont deux événements terrestres qui limitent une durée terrestre de 200 ans. A cause de la réciprocité précisément, Jacques multiplie cette durée par 100 et il lui attribue 20.000 ans. Comme il a voyagé un an avec Paul, il en reste 19.999 pour le retour.

Paul revient à la terre, mais, par un heureux hasard, il fait la route de conserve avec un nouveau voyageur, Jean, revenant en boulet des profondeurs du ciel. Ce nouveau voyageur interastral estime, pour les mêmes raisons que l'autre, que le voyage entier de Paul dure 20.000 ans, mais comme le retour n'en prend qu'un, il en reste 19.999 pour le voyage aller seul. Jacques et Jean attribuent donc la même durée au voyage aller et retour de Paul ; mais, quand ils se croisent, ce qui est pour eux un événement commun, ils peuvent constater qu'ils font sur ces deux durées de 20.000 ans un décalage relatif de 19.998 années ni plus ni moins.

On peut penser de ces chiffres tout ce que l'on voudra. Nous n'y attachons aucune importance. La seule chose en question est de savoir s'ils sont la conséquence logique du point de vue et des formules de Lorentz. Or nous pensons que personne n'aura l'idée de le mettre en doute. Le sentiment logique n'est pas heurté, à cause du fondement matériel que l'éther hypothétique de Lorentz paraît donner à la théorie.

4.

Voyons maintenant le point de vue d'Einstein.

Dans la pensée de Lorentz, il y a un système galiléen privilégié, l'éther. Mais dira Einstein à Lorentz, vous êtes à jamais condamné à ne jamais le connaître. Aucune expérience ne permettra jamais de discerner parmi tous les systèmes celui qui est lié à l'éther. Ce privilège, s'il existe, est purement métaphysique. Vous avez sacrifié la vérité des mesures à la solidité de l'éther qui, pour moi, n'est qu'une chimère. Moi, je fais le contraire. Je ne conteste

pas l'existence d'un milieu transmettant la lumière et je l'appellerai encore l'éther si vous voulez, mais je sacrifie sans regret l'hypothèse de sa solidité qui ne repose à mon sens sur aucun fondement physique.

Ce que la nature nous donne, ce n'est pas un éther solide absolument fixe, c'est un ensemble de systèmes galiléens et c'est *cet ensemble préétabli* qui est la seule matière sur laquelle porte la transformation de Lorentz.

Einstein ne garde donc comme réalité objective que la totalité des systèmes galiléens dont l'ensemble est préétabli par la nature et offre, par la considération du solide stellaire, un support tout aussi réel à la théorie que l'éther solide de Lorentz. La seule différence est qu'il n'y a plus de système privilégié, un système où les mesures seraient vraies tandis que dans tous les autres elles seraient fausses. Tous les systèmes galiléens se valent quant à la vérité des mesures que l'on y fait : c'est en cela, et en cela seulement, que consiste leur équivalence. Ces systèmes n'en sont pas moins aussi différents les uns des autres que dans la théorie de Lorentz : leur distinction est une réalité préétablie par la nature. Seulement on ne prétend plus en donner une explication métaphysique.

Enlever cette base à la théorie de la Relativité restreinte, c'est la détruire ou la rendre inintelligible. La théorie de la Relativité restreinte a pour objet d'expliquer l'Univers et non de nous faire connaître ce qui se passe dans la tête de deux personnages médusés dont la seule occupation serait de se regarder l'un l'autre. En dehors de ce cas puéril, les formules de Lorentz supposent la distinction des systèmes, sinon elles conduisent à la contradiction.

Est-ce à dire qu'il ne puisse exister de Relativité complète ou générale ? Assurément non, puisque Einstein en a tenté la théorie. Mais il l'a tenté autrement. Essayer de fonder la Relativité générale sur les formules de Lorentz est une tentative parfaitement absurde.

N° 3.

L'approximation des résidus dans la méthode des moindres carrés

par M. M. Alliaume (1)

—

1. La résolution du problème des moindres carrés, dans le cas particulier où toutes les mesures ont été faites avec la même approximation, se termine par la conclusion suivante. — Moyennant les conditions qui permettent l'application des probabilités à la théorie des erreurs, et l'assimilation de chaque mesure à l'extraction d'un numéro hors d'une urne exponentielle, les valeurs finales les plus probables des inconnues sont celles qui font passer par un minimum la somme des carrés des résidus, pourvu que ces valeurs ne soient pas extérieures au domaine défini par l'approximation des mesures.

La marche qu'il faudrait suivre dans les calculs est donc la suivante : 1° recherche du domaine des valeurs possibles des inconnues, eu égard à l'approximation des mesures ; 2° résolution du problème du minimum de la somme des carrés des résidus ; 3° confrontation des valeurs des inconnues ainsi obtenues et du domaine de leurs valeurs possibles.

Mais la première de ces recherches est généralement très longue. De plus, si on ne s'est pas laissé rebuter par ce premier calcul, celui-ci terminé, on se soustraira à tout ce que présente d'hypothétique et de conventionnel l'application des probabilités à la théorie des erreurs en adoptant la solution la plus approximative. La méthode des moindres carrés n'est avantageuse que si, précisément, elle dispense de la recherche du domaine de possibilité.

On suivra donc la marche inverse : 1° résolution du problème des moindres carrés, sans qu'on ait égard à l'approximation des mesures ; 2° substitution des valeurs obtenues aux inconnues dans chacune des équations d'observation, et calcul du résidu correspondant ; 3° rapprochement de chacun de ces résidus et de l'ap-

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 43 (1924), p. 158 de la première partie.

proximation connue par les données du problème ; — aucun résidu ne peut être extérieur à l'intervalle défini par l'approximation.

Il y aurait, en ceci, grand progrès vis-à-vis de la façon d'agir habituelle, dans laquelle on ne s'inquiète aucunement de l'approximation des mesures, et dans laquelle on estime la qualité des observations par une expression comme l'erreur probable, purement conventionnelle, et à laquelle on attribue généralement une signification qu'elle ne possède pas.

2. Dans le cas (par exemple, et auquel on peut se limiter) de trois inconnues, x, y, z, les équations initiales sont :

$$a_i x + b_i y + c_i z = m_i + r_i, \quad i = 1\,.\,2, \ldots n,$$

écrites au moyen de résidus r_i tels que

$$-\mathrm{M} \leqslant r_i \leqslant +\mathrm{M},$$

moyennant l'approximation M commune aux n observations.

Pour qu'une solution (X, Y, Z) soit admissible, il faut et il suffit que, pour toute valeur de i,

$$-\mathrm{M} \leqslant a_i \mathrm{X} + b_i \mathrm{Y} + c_i \mathrm{Z} - m_i \leqslant \mathrm{M},$$

ou que, à la fois,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i \mathrm{X} + b_i \mathrm{Y} + c_i \mathrm{Z} - (m_i - \mathrm{M}) \geqslant 0, \\ a_i \mathrm{X} + b_i \mathrm{Y} + c_i \mathrm{Z} - (m_i + \mathrm{M}) \leqslant 0. \end{array} \right.$$

En particulier, pour que soit admissible la solution des moindres carrés,

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}}{\Delta}, \quad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{B}}{\Delta}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{C}}{\Delta}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{vmatrix} [am] & [ab] & [ac] \\ [bm] & [bb] & [bc] \\ [cm] & [cb] & [cc] \end{vmatrix}, \ldots,$$

il faut et il suffit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a_i \mathrm{A} + b_i \mathrm{B} + c_i \mathrm{C} - (m_i - \mathrm{M})\Delta}{\Delta} \geqslant 0, \\ \dfrac{a_i \mathrm{A} + b_i \mathrm{B} + c_i \mathrm{C} - (m_i - \mathrm{M})\Delta}{\Delta} \leqslant 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que, à la fois, et pour chaque valeur de i,

$$1^\circ \quad \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & m_i - \mathrm{M} \\ [aa] & [ab] & [ac] & [am] \\ [ba] & [bb] & [bc] & [bm] \\ [ca] & [cb] & [cc] & [cm] \end{vmatrix} \quad \text{nul ou de même signe que } \Delta,$$

$$2^\circ \quad \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & m_i + \mathrm{M} \\ [aa] & [ab] & [ac] & [am] \\ [ba] & [bb] & [bc] & [bm] \\ [ca] & [cb] & [cc] & [cm] \end{vmatrix} \quad \text{nul ou de signe contraire à } \Delta \ (^1)$$

Posons

$$\mathrm{H}_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & m_i \\ [aa] & [ab] & [ac] & [am] \\ [ba] & [bb] & [bc] & [bm] \\ [ca] & [cb] & [cc] & [cm] \end{vmatrix}$$

les conditions nécessaires et suffisantes ci-dessus deviennent :

1° $(\mathrm{H}_i + \mathrm{M}\Delta)$ nul ou de même signe que Δ,
2° $(\mathrm{H} - \mathrm{M}\Delta)$ nul ou de signe contraire à Δ.

Or, si Δ est positif, ces deux conditions sont

$$\mathrm{M} \geqslant -\frac{\mathrm{H}_i}{\Delta}, \qquad \mathrm{M} \geqslant \frac{\mathrm{H}_i}{\Delta}$$

dont une seule est efficace, à savoir

$$\mathrm{M} \geqslant \left|\frac{\mathrm{H}_i}{\Delta}\right|,$$

et il en est de même si Δ est négatif. — Ainsi, dans la i^e observation, l'approximation minimum du résidu v_i compatible avec la solution des moindres carrés est

$$\mathrm{V}_i = \left|\frac{\mathrm{H}_i}{\Delta}\right|.$$

---

(1) Si les inconnues étaient en nombre pair, le sens des inégalités ci-dessus devrait être renversé, et ce qui suit ne serait pas affecté.

Inversement, adopter la solution des moindres carrés sans avoir égard à l'approximation, c'est admettre implicitement, pour chaque observation, une approximation au moins égale à cette expression V_i ; c'est admettre, pour l'ensemble des mesures, une approximation au moins égale à la plus grande de ces expressions (1).

---

(1) L'introduction des déterminants H_i conduit rapidement à l'expression de l'erreur moyenne, ou résidu moyen quadratique,

$$\rho = \sqrt{\frac{[RR]}{n}}$$

où chaque R_i est la valeur

$$a_iX + b_iY + c_iZ - m_i$$

que prend le résidu

$$r_i = a_ix + b_iy + c_iz - m_i$$

pour les valeurs (X, Y, Z), solution du problème des moindres carrés :

$$a_iX + b_iY + c_iZ - m_i = \frac{a_iA + b_iB + c_iC - m_i\Delta}{\Delta} = \frac{H_i}{\Delta};$$

d'où

$$nR^2 = \frac{[HH]}{\Delta^2},$$

et le carré du résidu moyen quadratique est la moyenne arithmétique de la somme des carrés des approximations minima compatibles avec la solution des moindres carrés dans chacune des équations primitives.

Pour retrouver, à partir de ce résultat, l'expression connue de l'erreur moyenne en fonction des coefficients des équations primitives, il suffit de remarquer que

$$[aH] = 0, \qquad [bH] = 0, \qquad [cH] = 0,$$

d'écrire les identités

$$a_iX + b_iY + c_iZ = m_i + \frac{H_i}{\Delta},$$

de les multiplier respectivement par H_i, de les ajouter membre à membre,

$$[mH] + \frac{[HH]}{\Delta} = 0,$$

de poser

$$H = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [am] \\ [ba] & [bb] & [bc] & [bm] \\ [ca] & [cb] & [cc] & [cm] \\ [ma] & [mb] & [mc] & [mm] \end{vmatrix} \text{ ou } -[mH],$$

pour obtenir

$$nR^2 = \frac{H}{\Delta}.$$

3. Si les n observations ont des approximations différentes M_i,

$$-M_i \leqslant r_i \leqslant +M_i,$$

et si les mesures sont assimilées à des extractions de billets hors d'urnes dont les indices de précision sont respectivement h_i, avec la condition que ces indices de précision sont inversement proportionnels aux approximations correspondantes,

$$h_i M_i = \text{constante},$$

les valeurs finales les plus probables sont celles qui font passer par un minimum la somme des carrés des résidus multipliés respectivement par les indices de précision correspondants,

$$[hr.\ hr],$$

pourvu que ces valeurs ne soient pas extérieures au domaine défini par l'approximation des mesures.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les n inégalités

$$M_i \geqslant \text{val. abs.} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & m_i \\ [ha.ha] & [ha.hb] & [ha.hc] & [ha.hm] \\ [hb.ha] & [hb.hb] & [hb.hc] & [hb.hm] \\ [hc.ha] & [hc.hb] & [hc.hc] & [hc.hm] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} [ha.ha] & [ha.hb] & [ha.hc] \\ [hb.ha] & [hb.hb] & [hb.hc] \\ [hc.ha] & [hc.hb] & [hc.hc] \end{vmatrix}$$

ou

$$M_i \geqslant \text{val. abs.} \begin{vmatrix} a_i & \dots & \dots \\ \left[\frac{a}{M}\cdot\frac{a}{M}\right] & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \left[\frac{a}{M}\cdot\frac{a}{M}\right] & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

soient satisfaites (1). Inversement, adopter la solution des moindres

---

(1) Par exemple, dans le cas d'observations directes

$$x = m_i, \qquad i = 1, 2, \dots n,$$

et pour des poids h_i^2 dont les racines carrees sont inversement proportionnelles aux approximations M_i, l'adoption de la solution des moindres carrés,

$$X = \sum_j m_j h_j^2 : \sum_j h_j^2$$

carrés sans avoir égard aux approximations, mais en se donnant des nombres $k_1, k_2, \ldots k_n$ qui sont entre eux comme les approximations qui leur correspondent par la valeur de leurs indices, c'est admettre implicitement, pour chaque i^e observation, une approximation au moins égale à la valeur que prend le second membre de la dernière inégalité ci-dessus lorsqu'on y remplace chaque M_i par le coefficient k_i qui porte le même indice ; c'est, aussi bien, admettre pour le rapport constant C_i de l'approximation M_i de toute mesure au coefficient k_i correspondant, une valeur au moins égale à la plus grande des quantités

$$\left| \begin{matrix} a_i \ldots \ldots \\ \left[\frac{a}{R} \cdot \frac{a}{R}\right] \ldots \\ \ldots \ldots \end{matrix} \right| : k_i \left| \begin{matrix} \left[\frac{a}{R} \cdot \frac{a}{R}\right] \ldots \\ \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \end{matrix} \right| . \quad (1)$$

---

n'est admissible que moyennant, pour chaque i^e observation, une approximation au moins égale à

$$\sum_j (m_j - m_i) h_j^2 \ : \ \sum h_j^2,$$

expression qui acquiert sa plus grande valeur absolue pour la mesure m_i la plus éloignée de X.

(1) Les observations sont souvent organisées de façon que les coefficients a_i, b_i, c_i des équations initiales sont des fonctions déterminées du numéro d'ordre i de l'équation à laquelle ils appartiennent. Dans ce cas, pour chaque i^e observation, la valeur minimum de l'approximation M_i est une fonction de i et de m_i seuls, et linéaire par rapport à m_i :

$$M_i = f(i) + m_i.$$

Par rapport à des axes coordonnés des i, des m_i et des M_i, et i et m étant supposés pour un instant des variables continues, cette équation est celle d'une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles au plan des (m_i, M_i), et inclinées d'un demi-droit sur le plan des (i, m_i) ; dans ce dernier plan, la trace du cylindre a pour équation $f(i) + m_i = 0$, d'où, facilement, construira-t-on une épure de cette surface, de préférence en projections cotées. Chaque observation définit un point du plan des (i, m_i), et la cote de la surface en ce point est le M_i correspondant. — Si les approximations des diverses

observations sont différentes, les valeurs minima du rapport C sont les cotes des points de la surface

$$C_i = \frac{f(i)}{k_i} + \frac{m_i}{k_i}.$$

Dans sa *Théorie des erreurs d'observation* (3me édition, 1914, p. 89), M. Goedseels résout par la méthode de l'approximation minimum un système de dix équations à deux inconnues établi pour l'étalonnage d'une lunette stadimétrique. Les équations initiales sont

$$x + 20\,i\,.\,y = m_i\,, \qquad k_i = 20\,i, \qquad i = 1, 2, \ldots 10.$$

Les valeurs numériques de m_i

$m_1 = 0{,}200$ $m_2 = 0{,}400$ $m_3 = 0{,}600$ $m_4 = 0{,}800$ $m_5 = 1{,}008$
$m_6 = 1{,}218$ $m_7 = 1{,}426$ $m_8 = 1{,}628$ $m_9 = 1{,}830$ $m_{10} = 2{,}036$

sont telles que, dans la résolution des mêmes équations par la méthode des moindres carrés, l'expression générale des M_i est

$$M_i = -0{,}666 + 0{,}289\,i + m_i$$

et celle des C_i

$$C_i = -\frac{0{,}033}{i} + 0{,}015 + \frac{m_i}{20\,i},$$

de sorte que, en valeur absolue,

$M_1 = 0{,}177$ $M_2 = 0{,}312$ $M_3 = 0{,}801$ $M_4 = 1{,}290$ $M_5 = 1{,}787$
$M_6 = 2{,}286$ $M_7 = 2{,}783$ $M_8 = 3{,}294$ $M_9 = 3{,}765$ $M_{10} = 4{,}260$

et

$C_1 = 0{,}009$ $C_2 = 0{,}008$ $C_3 = 0{,}013$ $C_4 = 0{,}014$ $C_5 = 0{,}018$
$C_6 = 0{,}019$ $C_7 = 0{,}020$ $C_8 = 0{,}021$ $C_9 = 0{,}021$ $C_{10} = 0{,}021$.

N° 4.

Les méthodes de la théorie des erreurs et les équations corrélatives

par M. M. Alliaume (1)

1. Moyennant la connaissance de valeurs approchées des inconnues, les équations d'observation peuvent être réduites à la forme linéaire. Pour n inconnues et m observations, ce seront

$$\sum_t c_{st} x_t = c_s \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} s = 1, 2, \ldots m \\ t = 1, 2, \ldots n \end{matrix} \right. \quad n \leqslant m.$$

Eu égard à l'approximation du résidu de chaque s^e équation

$$-\mathrm{M}_s \leqslant \sum_t c_{st} x_t - c_s \leqslant \mathrm{M}_s$$

et les groupes de valeurs possibles des inconnues sont ceux qui satisfont à ces $2m$ inégalités. L'élimination de

$$x_{n-(k-1)},\ x_{n-(k-2)},\ \ldots\ x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n$$

laisse un système d'inégalités en

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{n-(k+1)},\ x_{n-k},$$

et des éliminations successives établissent n pareils systèmes pour $k = 0$, $k = 1$, ... $k = n - 1$, dont le premier n'est autre que le système primitif.

Le système $k = n - 1$ est en x_1 seul et deux, au plus, des inégalités qui le composent sont efficaces : l'une impose à x_1 une limite inférieure numérique L'_1, l'autre lui impose une limite supérieure numérique L''_1.

Le système $k = n - 2$ est en (x_1, x_2), et ce n'est qu'après que x_1 y aura reçu une valeur numérique possible en vertu du système précédent que la résolution de ce système donnera les limites correspondantes de x_2 : les limites de x_2 sont des fonctions de x_1,

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t 43 (1924), p. 164 de la première partie.

où x_t peut recevoir toute valeur admissible d'après le système précédent.

D'une manière générale, d'après le système $k = n - t$, les limites imposées à l'inconnue x_t sont des fonctions des inconnues $x_1, x_2, \ldots x_{t-1}$, dans lesquelles ces inconnues peuvent prendre tout groupe de valeurs admissibles en vertu des $(t - 1)$ systèmes précédents.

La méthode la plus approximative ne cherche pas de cette manière le domaine des groupes possibles des inconnues. L'élimination de toutes les inconnues, sauf, chaque fois, une seule x_t $(t = 1, 2, \ldots n)$, laisse n systèmes d'inégalités, dont chacun, en une seule inconnue, fournit généralement, pour cette inconnue, une limite inférieure numérique $(L')_t$ et une limite supérieure numérique $(L'')_t$. Le domaine des groupes $x_t = x_1, x_2, \ldots x_n$ ainsi limité est généralement plus grand que le domaine des valeurs possibles : il lui est circonscrit. Néanmoins, le point milieu du domaine circonscrit, dont les coordonnées sont $\frac{(L')_t + (L'')_t}{2}$, valeurs finales de la méthode la plus approximative, n'est pas extérieur au domaine possible : ceci provient de ce que ce dernier domaine est nécessairement convexe.

2. Les μ équations corrélatives, dans les mêmes circonstances que les m équations d'observation, sont réduites à la forme linéaire :

$$\sum_t \Upsilon_{\sigma t}\, x_t = \Upsilon_\sigma \ldots\ldots \begin{cases} \sigma = 1, 2, \ldots \mu \\ t = 1, 2, \ldots n \end{cases} \quad \mu < n < m.$$

Il faut considérer le système formé par ces μ équations corrélatives et les $2m$ inégalités

$$- M_s \leqslant \sum_t c_{st}\, x_t - c_s \leqslant M_s.$$

La méthode la plus approximative s'appliquera par le traitement de ce système d'après la méthode habituelle : la résolution du groupe des équations corrélatives par rapport à μ des inconnues finales permettra d'éliminer ces inconnues, et laissera un système de $2m$ inégalités entre les $(n - \mu)$ inconnues restantes. Dans le cas actuel d'équations corrélatives linéaires, on trouvera peut-être avantageuse la disposition suivante de ces calculs.

Par une transformation linéaire, introduisons n inconnues nouvelles ξ_τ, $\tau = 1, 2, \ldots n$:

$$x_l = X_l + \sum_\tau \lambda_{l\tau}\,\xi_\tau$$

avec n paramètres X_l et n^2 coefficients $\lambda_{l\tau}$. Les équations corrélatives prennent la forme

$$\sum_\tau \Gamma_{\sigma\tau}\xi_\tau = \Gamma_\sigma$$

où

$$\Gamma_{\sigma\tau} = \sum_t \gamma_{\sigma t}\lambda_{t\tau}, \quad \Gamma_\sigma = \gamma_\sigma - \sum_t \gamma_{\sigma t}X_t.$$

Aux $n + n^2$ indéterminées, imposons que ces μ équations soient satisfaites identiquement pour

$$\xi_{n-(\mu-1)} = 0, \quad \xi_{n-(\mu-2)} = 0, \ldots \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_n = 0$$

quelles que soient les valeurs des $(n - \mu)$ premières inconnues $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-\mu}$, c'est-à-dire que

$$\Gamma_{\sigma\tau} = 0, \quad \Gamma_\sigma = 0 \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \sigma = 1, 2, \ldots \mu \\ \tau = 1, 2, \ldots n-\mu \end{array} \right.$$

ce qui constitue un système de $\mu(n - \mu + 1)$ égalités entre les $n(n + 1)$ paramètres X et λ indéterminés.

Pour des valeurs de ces paramètres satisfaisant à ces conditions, les équations d'observation prennent la forme

$$\sum_\tau C_{s\tau}\xi_\tau = C_s$$

où

$$C_{s\tau} = \sum_t c_{st}\lambda_{t\tau}, \quad C_s = c_s - \sum_t c_{st}X_t,$$

et dans lesquelles il suffit de faire $s = 1, 2, \ldots n - \mu$. Dès lors, il n'y a plus à tenir compte des équations de corrélation, et il suffit de résoudre le système

$$-M_s \leqslant \sum_t C_{s\tau}\xi_\tau \quad C_s \leqslant M_s$$

de $2m$ inégalités entre $(n - \mu)$ inconnues.

A un système de nombres ξ satisfaisant à ces inégalités correspondent les valeurs

$$x_t = X_t + \sum_\tau \lambda_{t\tau}\xi_\tau \ldots \left\{ \begin{matrix} t = 1, 2, \ldots n \\ \tau = 1, 2, \ldots \mu - n \end{matrix} \right.$$

des inconnues primitives.

3. Dans la méthode des moindres carrés, les valeurs finales des inconnues sont celles qui, vérifiant les équations corrélatives, font passer par un minimum la somme

$$\sum_s \left[\sum_t c_{st} x_t - c_s \right]^2$$

des carrés des résidus, et les différentielles dx_t vérifient les $(\mu+1)$ équations

$$\sum_t \gamma_{\sigma t} dx_t = 0,$$

$$\sum_s \left[\left(\sum_t c_{st} x_t - c_s \right) \sum_t c_{st} dx_t \right] = 0,$$

néaires et homogènes en dx_1, dx_2, ... dx_n.

Dans cette dernière équation, nous abrégerons les écritures en posant :

$$T_t \quad \text{pour} \quad \sum_s c_{st} \left(\sum_t c_{st} x_t - c_s \right),$$

coefficient de dx_t.

Dans le système des $(\mu + 1)$ équations en dx_1, dx_2, ... dx_n, l'élimination des μ différentielles dx_{r+1}, dx_{r+2}, $dx_{r+\mu}$, où $0 \leqslant r \leqslant n - \mu$, laisse l'équation

$$\begin{vmatrix} T_1 dx_1 + \ldots + T_r dx_r & T_{r+1} \ldots T_{r+\mu} & T_{r+\mu+1} dx_{r+\mu+1} + \ldots + T_n dx_n \\ \gamma_{11} dx_1 + \ldots + \gamma_{1r} dx_r & \gamma_{1\,r+1} \ldots \gamma_{1\,r+\mu} & \gamma_{1\,r+\mu+1} dx_{r+\mu+1} + \ldots + \gamma_{1n} dx_n \\ \gamma_{21} dx_1 + \ldots + \gamma_{2r} dx_r & \gamma_{2\,r+1} \ldots \gamma_{2\,r+\mu} & \gamma_{2\,r+\mu+1} dx_{r+\mu+1} + \ldots + \gamma_{2n} dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{\mu 1} dx_1 + \ldots + \gamma_{\mu r} dx_r & \gamma_{\mu\, r+1} \ldots \gamma_{\mu\, r+\mu} & \gamma_{\mu\, r+\mu+1} dx_{r+\mu+1} + \ldots + \gamma_{\mu n} dx_n \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de chacune des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots dx_r, dx_{r+\mu+1}, \ldots dx_n$ est égal à zéro ; pour un dx_k quelconque

$$1 \leqslant k \leqslant r \qquad \text{ou} \qquad r+\mu+1 \leqslant k \leqslant n,$$

et les T ayant été remplacés par les expressions correspondantes,

$$\begin{vmatrix} \sum_s c_{s\,k}\left(\sum_\tau c_{s\tau}x_\tau - c_s\right) & \Upsilon_{1\,k} & \Upsilon_{2\,k} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,k} \\ \sum_s c_{s\,r+1}\left(\sum_\tau c_{s\tau}x_\tau - c_s\right) & \Upsilon_{1\,r+1} & \Upsilon_{2\,r+1} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+1} \\ \sum_s c_{s\,r+2}\left(\sum_\tau c_{s\tau}x_\tau - c_s\right) & \Upsilon_{1\,r+2} & \Upsilon_{2\,r+2} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+2} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \sum_s c_{s\,r+\mu}\left(\sum_\tau c_{s\tau}x_\tau - c_s\right) & \Upsilon_{1\,r+\mu} & \Upsilon_{2\,r+\mu} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette équation, le coefficient de x_τ est

$$\mathrm{B}_{k\tau} = \begin{vmatrix} \sum_s c_{s\,k}\,c_{s\tau} & \Upsilon_{1\,k} & \Upsilon_{2\,k} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,k} \\ \sum_s c_{s\,r+1}\,c_{s\tau} & \Upsilon_{1\,r+1} & \Upsilon_{2\,r+1} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \sum_s c_{s\,r+\mu}\,c_{s\tau} & \Upsilon_{1\,r+\mu} & \Upsilon_{2\,r+\mu} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+\mu} \end{vmatrix}$$

et le terme constant (censé dans le second membre) est

$$\mathrm{B}_k = \begin{vmatrix} \sum_s c_{s\,k}\,c_s & \Upsilon_{1\,k} & \Upsilon_{2\,k} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,k} \\ \sum_s c_{s\,r+1}\,c_s & \Upsilon_{1\,r+1} & \Upsilon_{2\,r+1} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \sum_s c_{s\,r+\mu}\,c_s & \Upsilon_{1\,r+\mu} & \Upsilon_{2\,r+\mu} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r+\mu} \end{vmatrix}$$

4. D'une manière plus générale, si les différentielles éliminées sont des dx écrits au moyen de μ indices quelconques r_1, r_2,... r_μ, et notés ci-dessous dx_{r1}, dx_{r2},... $dx_{r\mu}$, pour la facilité de l'impression, l'équation obtenue en égalant à 0 le coefficient de dx_i, où i prend les valeurs $1, 2, \ldots n$ sauf r_1, r_2 ... r_μ, a pour coefficient de x_j ($j = 1, 2, \ldots n$) l'expression

$$B_{ij} = \begin{vmatrix} \sum_s c_{s\,i}\, c_{sj} & \Upsilon_{1\,i} & \Upsilon_{2\,i} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,i} \\ \sum_s c_{s\,r1}\, c_{sj} & \Upsilon_{1\,r1} & \Upsilon_{2\,r1} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_s c_{s\,r\mu}\, c_{sj} & \Upsilon_{1\,r\mu} & \Upsilon_{2\,r\mu} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r\mu} \end{vmatrix},$$

et pour terme constant (censé dans le second membre) l'expression :

$$B_i = \begin{vmatrix} \sum_s c_{s\,i}\, c_s & \Upsilon_{1\,i} & \Upsilon_{2\,i} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,i} \\ \sum_s c_{s\,r1}\, c_s & \Upsilon_{1\,r1} & \Upsilon_{2\,r1} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_s c_{s\,r\mu}\, c_s & \Upsilon_{1\,r\mu} & \Upsilon_{2\,r\mu} & \cdots\cdots & \Upsilon_{\mu\,r\mu} \end{vmatrix}.$$

Ces $(n - \mu)$ équations et les μ équations corrélatives constituent un système linéaire de n équations en x_1, x_2,. . x_n. Mais les coefficients B_{ij} et B_i seraient nuls si on y donnait à i l'une des μ valeurs $r_1, r_2, \ldots r_\mu$. Ce qui permet de conclure : les valeurs finales x_1, x_2,... x_n sont les racines du système linéaire

$$\sum_j B_{ij}\, x_j = B_i$$

où l'on donne à i toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$ et dans lequel on remplace par les équations corrélatives

$$\sum_j \Upsilon_{\sigma j}\, dx_j = \Upsilon_\sigma \qquad\qquad \sigma = 1, 2, \ldots \mu$$

les μ équations qui se réduisent à des identités.

5. Considérons les $(n+1)$ tableaux carrés $(i, j, t = 1, 2, \ldots n)$

$$D = \| B_{ij} \|$$

$$N_t = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\,t-1} & B_1 & B_{1\,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2\,t-1} & B_2 & B_{2\,t+1} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{n\,t-1} & B_n & B_{n\,t+1} & \cdots & B_{nn} \end{Vmatrix}$$

dont les lignes $i = r_1, r_2, \ldots r_\mu$ ne renferment que des zéros. La solution finale du problème des moindres carrés est

$$x_t = \frac{N'_t}{D'}$$

où D' est le déterminant formé par le tableau D dans lequel les μ lignes qui ne renferment que des zéros ont été remplacées par les μ lignes du tableau

$$\begin{Vmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \cdots & \Upsilon_{1n} \\ \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22} & \cdots & \Upsilon_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Upsilon_{\mu 1} & \Upsilon_{\mu 2} & \cdots & \Upsilon_{\mu n} \end{Vmatrix}$$

et où N'_t est le déterminant formé par le tableau N_t dans lequel, dans le même ordre, les μ lignes qui ne renferment que des zéros ont été remplacées par les μ lignes du tableau

$$\begin{Vmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \cdots & \Upsilon_{1\,t-1} & \Upsilon_1 & \Upsilon_{1\,t+1} & \cdots & \Upsilon_{1n} \\ \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22} & \cdots & \Upsilon_{2\,t-1} & \Upsilon_2 & \Upsilon_{2\,t+1} & \cdots & \Upsilon_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Upsilon_{\mu_1} & \Upsilon_{\mu_2} & \cdots & \Upsilon_{\mu\,t-1} & \Upsilon_\mu & \Upsilon_{\mu\,t+1} & \cdots & \Upsilon_{\mu n} \end{Vmatrix}$$

Ces résultats sont indépendants des μ valeurs distinctes, de 1 à n, limites comprises, adoptées pour $r_1, r_2, \ldots r_\mu$.

N° 5.

Essai d'extension de la méthode des moindres carrés au cas dans lequel les lois de probabilité des erreurs sont légèrement dissymétriques

par M. M. Alliaume (1)

—

1. En vue de la détermination directe ou indirecte d'une ou de plusieurs grandeurs inconnues, des mesures ont été effectuées, à chacune desquelles correspond une approximation connue. Ces données permettent le calcul des valeurs extrêmes des inconnues, limites des domaines de leurs valeurs possibles. — Si on se propose la recherche des valeurs les plus probables des grandeurs inconnues, moyennant une loi ou des lois de probabilité d'erreur de la forme $\eta = f(\xi)$, et dans l'hypothèse de valeurs possibles également probables à priori, on applique l'un des théorèmes suivants :

1° Après une mesure directe m, la valeur la plus probable x de la grandeur inconnue est celle qui annule la dérivée de $f(x - m)$ par rapport à x.

2° Après plusieurs mesures directes m_i d'une même grandeur, effectuées dans les mêmes conditions, la valeur la plus probable x de la grandeur inconnue est celle qui annule la dérivée du produit $\Pi f(x - m_i)$ par rapport à x.

3° Après plusieurs mesures directes m_i, à chacune desquelles correspond une fonction f_i de probabilité d'erreur, la valeur la plus probable x de la grandeur inconnue est celle qui annule la dérivée du produit $\Pi f_i(x - m_i)$ par rapport à x.

4° Après des mesures m_i de grandeurs g_i, pour la détermination d'inconnues finales (x, y, z) telles que

$$a_i x + b_i y + c_i z = g_i$$

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 43 (1924), p. 309, de la première partie.

et à chacune desquelles mesures correspond une fonction f_i de probabilité d'erreur, les valeurs les plus probables (x, y, z) des inconnues finales sont celles qui annulent les dérivées partielles du produit $\Pi f_i(a_i x + b_i y + c_i z - m_i)$ par rapport à x, y, z.

Sous réserve, dans l'application de ces théorèmes, que les valeurs obtenues ne soient pas extérieures aux intervalles de possibilité des inconnues.

2. Ces théorèmes s'appliquent d'une manière particulièrement simple dans l'hypothèse de lois de probabilité exponentielles,

$$\log \lambda_i - \log \eta = h_i^2 \xi^2 ;$$

ils fournissent alors respectivement l'unique mesure elle-même, la moyenne arithmétique des mesures, leur moyenne par poids, les solutions du problème des moindres carrés.

Les caractères de la courbe exponentielle de probabilité sont un maximum unique, la symétrie par rapport à l'ordonnée de ce maximum, le fait que son ordonnée (toujours positive) tend vers zéro lorsque la valeur absolue de l'abscisse augmente indéfiniment, et son extrême simplicité. Ces propriétés donnent de tels avantages à la loi exponentielle qu'on ne renonce pas à son emploi lorsque les circonstances imposeraient plutôt une loi qui ne vérifierait pas très bien la condition de symétrie. — On cherchera ci-dessous à concilier les avantages de la méthode des moindres carrés avec la considération d'une courbe de probabilité légèrement dissymétrique : au cours de cette recherche, on précisera ce qu'il y a lieu d'entendre par une dissymétrie légère de la courbe de probabilité.

Le principe de cet essai consiste dans une anamorphose de la courbe de probabilité exponentielle, par une transformation homographique n'affectant que les abscisses :

$$\log \lambda - \log \eta = h^2 \left(\frac{p + \xi}{1 + q\xi} \right)^2 ;$$

et la condition qu'il n'y a que légère dissymétrie s'exprime d'abord par celle que p et q soient des quantités petites, dont les carrés et produit sont négligeables.

L'ordonnée de cette courbe, toujours positive, passe par le

maximum λ lorsque $\xi = -p$ et tend vers $\lambda e^{-h^2/q^2}$ lorsque ξ augmente indéfiniment ; elle passe par un minimum, qui est nul, pour $\xi = -1/q$, et la condition de dissymétrie légère se complète par celle que, dans toute application, à cette abscisse de probabilité nulle, corresponde, comme il est nécessaire, une valeur de l'inconnue située en dehors de l'intervalle des valeurs possibles, cet intervalle renfermant les valeurs de l'inconnue voisines de celle à laquelle correspond la probabilité maximum (1).

3. Dans le cas d'une mesure directe m, la valeur la plus probable x de la grandeur inconnue est $(m - p)$: on pourra dire que le déplacement p du sommet de la courbe de probabilité est

---

(1) Pour étudier la transformation de la courbe exponentielle primitive

$$\log \lambda - \log \eta_1 = H^2 \xi_1^2 \qquad (1)$$

dans la courbe actuelle

$$\log \lambda - \log \eta_2 = h^2 \left(\frac{p + \xi_2}{1 + q\xi_2} \right)^2, \qquad (2)$$

on considérera avantageusement un axe des ζ perpendiculaire au plan des (ξη) et le cylindre dont la directrice est la courbe (1) tandis que ses génératrices sont parallèles à l'axe des ζ. Ce cylindre est coupé par un plan $\zeta = m\xi + k$ parallèle à l'axe des η. A un point quelconque $(\xi_1, \eta_1, m\xi_1 + k)$ de l'intersection correspond sa perspective $(\xi_2, \eta_2, 0)$ dans le plan des (ξη) par rapport au point de vue (ξ_0, η_1, ζ_0) ayant la même ordonnée η_1 et appartenant à une droite donnée (ξ_0, ζ_0) parallèle à l'axe des η. La transformation homographique cherchée est le passage du point $(\xi_1, \eta_1, 0)$ au point $(\xi_2, \eta_2 = \eta_1, 0)$, et la courbe (2) est le lieu de ce dernier point lorsque le premier décrit la ligne (1) — On obtient

$$\xi_2 = \frac{k\xi_0 - \xi_1(\zeta_0 - m\xi_0)}{m\xi_1 + k - \zeta_0},$$

et, inversement,

$$\xi_1 = \frac{k\xi_0 - (k - \zeta_0)\xi_2}{m\xi_2 + \zeta_0 - m\xi_0}.$$

L'équation de la ligne (2) est

$$\log \lambda - \log \eta_2 = H^2 \left[\frac{k\xi_0 - (k - \zeta_0)\xi_2}{m\xi_2 + \zeta_0 - m\xi_0} \right]^2,$$

d'où, par identification,

$$h = H \frac{k - \zeta_0}{\zeta_0 - m\xi_0}, \qquad p = -\frac{k}{k - \zeta_0}, \qquad q = \frac{m}{\zeta_0 - m\xi_0}.$$

Les lignes (1) et (2) se coupent en quatre points. Deux de ces points d'intersection sont ceux où un point de la courbe (1) est sa propre perspective, à savoir ceux qui ont pour abscisses l'abscisse ξ_0 du point du vue et celle $-k/m$

effectuées dans des conditions différentes, auxquelles correspondent respectivement des poids h_i^2 et des paramètres petits (p_i, q_i), la valeur la plus probable x de la grandeur inconnue est celle qui, voisine de

$$x_0 = \frac{\Sigma h_i^2 m_i}{\Sigma h_i^2},$$

dû à une erreur systématique ; en l'absence d'erreur systématique, on fera $p = 0$.

Dans le cas de n mesures directes m_i d'une même grandeur, effectuées dans les mêmes conditions, la valeur la plus probable x de la grandeur inconnue est celle qui, voisine de

$$x_0 = \frac{\Sigma m_i}{n},$$

satisfait à l'équation

$$\sum \frac{p + x - m_i}{[1 + q(x - m_i)]^3} = 0$$

ou, à l'approximation actuelle,

$$np + \Sigma(x - m_i) - 3q\Sigma(x - m_i)^2 = 0.$$

Si on pose

$$x = x_0 + \Delta x,$$

la correction de dissymétrie cherchée, petite comme p et q, est

$$\Delta x = -p + \frac{3q}{n}\Sigma(x_0 - m_i)^2.$$

Dans le cas de n mesures directes m_i d'une même grandeur,

---

de la droite d'intersection du plan des $(\xi\eta)$ et du plan sécant. Les deux autres points d'intersection sont ceux où un point de la courbe (1) et sa perspective sont symétriques par rapport à l'axe des η : leurs abscisses sont les racines de l'équation en ξ

$$\xi + \frac{k\xi_0 - \xi(\zeta_0 - m\xi_0)}{m\xi + k - \zeta_0} = 0.$$

Le point de contact de la courbe (2) avec l'axe des ξ correspond au point à l'infini de la courbe (1) : il appartient au plan parallèle au plan sécant et passant par la droite des points de vue (ξ_0, ζ_0). Le point à l'infini de la courbe (2) est la perspective du point de la courbe d'intersection situé dans le plan parallèle au plan des $(\xi\eta)$ et passant par la droite des points de vue ; ce point de la ligne d'intersection et le point correspondant de la courbe (1) appartiennent à une même génératrice du cylindre, et la coordonnée η de cette génératrice est l'ordonnée de asymptote de la ligne (2).

satisfait à l'équation

$$\sum h_i^2(1 - p_i q_i) \frac{p_i + x - m_i}{[1 + q_i(x - m_i)]^3} = 0$$

ou, à l'approximation actuelle,

$$\Sigma h_i^2 p_i + \Sigma h_i^2 (x - m_i) - 3\Sigma h_i^2 q_i (x - m_i)^2 = 0.$$

Si on pose

$$x = x_o + \Delta x,$$

la correction de dissymétrie est, à la même approximation,

$$\Delta x = - \frac{\Sigma h_i^2 p_i}{\Sigma h_i^2} + \frac{3\Sigma h_i^2 q_i (m_i - x_o)^2}{\Sigma h_i^2}.$$

4. Dans le cas général d'observations indirectes, on a effectué les mesures m_i de n quantités g_i auxquelles les inconnues finales (x, y, z) sont liées par des équations linéaires

$$a_i x + b_i y + c_i z - g_i = 0$$

dont les coefficients sont connus. Les valeurs les plus probables de ces inconnues finales sont celles qui, voisines des racines (x_o, y_o, z_o) des équations du problème ordinaire des moindres carrés, satisfont aux trois équations

$$\sum h_i \mu (1 - p_i q_i) \frac{a_i x + b_i y + c_i z - m_i + p_i}{[1 + q_i(a_i x + b_i y + c_i z - m_i)]^3} = 0,$$

écrites en une seule, mais dans laquelle la lettre μ doit être remplacée successivement par a_i, b_i, c_i. A l'approximation actuelle, ces équations sont :

$$\Sigma h_i \mu [a_i x + b_i y + c_i z - m_i + p_i + 3 q_i (a_i x + b_i y + c_i z - m_i)^2] = 0.$$

1° Si les poids h_i^2 sont égaux, les solutions (x_o, y_o, z_o) du problème ordinaire des moindres carrés sont les racines des équations

$$\begin{aligned} [aa]x_o + [ab]y_o + [ac]z_o - [am] &= 0, \\ [ab]x_o + [bb]y_o + [bc]z_o - [bm] &= 0, \\ [ca]x_o + [cb]y_o + [cc]z_o - [cm] &= 0, \end{aligned}$$

et si on pose

$$x = x_o + \Delta x, \qquad y = y_o + \Delta y, \qquad z = z_o + \Delta z,$$

les corrections de dissymétrie sont les racines des équations linéaires

$$[aa]\Delta x + [ab]\Delta y + [ac]\Delta z = -[ap] + 3\Sigma a_i q_i (a_i x_o - b_i y_o + c_i z_o - m_i)^2,$$
$$[ba]\Delta x + [bb]\Delta y + [bc]\Delta z = -[bp] + 3\Sigma b_i q_i (a_i x_o + b_i y_o + c_i z_o - m_i)^2,$$
$$[ca]\Delta x + [cb]\Delta y + [cc]\Delta z = -[cp] + 3\Sigma c_i q_i (a_i x_o + b_i y_o + c_i z_o - m_i)^2 \ (^1).$$

(1) Ces équations en (x_o, y_o, z_o) puis en $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ sont celles qu'il faudrait résoudre pour trouver, moyennant les postulats ordinaires, les valeurs les plus probables de quantités (x, y, z), inconnues dans le système d'équations

$$a_i x_i + b_i y + c_i z - m_i + p_i + 3q_i (a_i x + b_i y + c_i z - m_i)^2 = 0$$

non linéaires, surabondantes et incompatibles — La généralisation de ceci constitue une *extension de la méthode des moindres carrés aux équations non linéaires, où les termes de degré supérieur au premier sont tous petits.*

Soit un système de pareilles équations

$$a_i x + b_i y + c_i z = m_i + f_i(x, y, z)$$

surabondantes et incompatibles, où f_i est un polynôme dont les coefficients sont petits ; l'approximation consiste à négliger les termes de l'ordre du carré des quantités petites.

En première approximation, soient x_o, y_o, z_o les valeurs les plus probables des inconnues, données par la résolution des trois équations linéaires

$$[aa]x_o + [ab]y_o + [ac]z_o - [am] = 0, \ldots$$

et soient r_i les résidus correspondants :

$$r_i = a_i x_o + b_i y_o + c_i z_o - m_i.$$

Si, en vue de l'approximation définitive, on pose $x = x_o + \Delta x$, $y = y_o + \Delta y$, $z = z_o + \Delta z$, les équations proposées s'écrivent, à cette approximation,

$$a_i \Delta x + b_i \Delta y + c_i \Delta z = f_i(x_o, y_o, z_o) + r_i.$$

Elles sont linéaires en Δx, Δy, Δz ; or on sait que $[ar] = 0$, $[br] = 0$, $[cr] = 0$. de sorte que les équations finales correspondantes de la méthode des moindres carrés sont :

$$[aa]\Delta x + [ab]\Delta y + [ac]\Delta z = [af(x_o, y_o, z_o)],$$
$$[ba]\Delta x + [bb]\Delta y + [bc]\Delta z = [bf(x_o, y_o, z_o)],$$
$$[ca]\Delta x + [cb]\Delta z + [cc]\Delta z = [cf(x_o, y_o, z_o)].$$

D'autre part, ce sont les équations par lesquelles se terminerait, en deuxième approximation, la résolution du système

$$\Sigma a_i \} \ a_i x + b_i y + c\, z - m_i - f_i(x, y, z) \} = 0.$$
$$\Sigma b_i \} \ a_i x + b_i y + c_i z - m_i - f_i(x, y, z) \} = 0,$$
$$\Sigma c_i \} \ a_i x + b_i y + c_i z - m_i - f_i(x, y, z) \} = 0.$$

Ainsi, pour énoncer la méthode des moindres carrés dans une formule qui soit applicable aux équations non linéaires (dans les conditions précisées ci-dessus), il suffit de dire : les valeurs finales des inconnues sont les racines du

2° Si les poids h_i^2 ne sont pas égaux, on sait que les solutions du problème ordinaire des moindres carrés se trouvent par les mêmes équations finales dans lesquelles on remplace, pour toute valeur de i,

$$a_i \text{ par } h_i a_i, \quad b_i \text{ par } b\, h_i, \quad c_i \text{ par } c_i h\,, \quad m_i \text{ par } m_i h^i.$$

De même, ici, les corrections de dissymétrie seront les racines des équations linéaires ci-dessus, pourvu qu'on y remplace, en outre,

$$p_i \text{ par } p_i h_i \quad \text{et} \quad q_i \text{ par } q_i/h_i.$$

---

système d'équations obtenu en faisant la somme des équations proposées multipliées successivement chacune par le coefficient de son terme en x, puis par le coefficient de son terme en y, et ainsi de suite ; cet énoncé est équivalent, comme il est nécessaire, à l'énoncé habituel de la règle des moindres carrés par le minimum de la somme des carrés des résidus, dans le cas particulier des équations linéaires.

N° 6.

Les jeux d'adresse et la théorie des erreurs

par M. M. Alliaume (1)

Dans l'application du Calcul des probabilités à la théorie des erreurs, une mesure est assimilée à l'extraction d'un billet hors d'une urne ; les postulats qui sont à la base de la théorie des erreurs établissent une correspondance entre les circonstances de la mesure et la composition de l'urne. On peut trouver plus avantageux d'assimiler la mesure à un coup dans un jeu d'adresse. Dans le cas simple où le résultat de la mesure s'exprime par un seul nombre, le jeu consiste à lancer un point matériel sur un segment de droite graduée (horizontale), en cherchant à atteindre un point déterminé de cette droite ; les abscisses de l'origine et de l'extrémité de celle-ci se déduisent de l'approximation de la mesure et limitent l'intervalle des valeurs possibles de l'inconnue cherchée.

Il reste à faire le passage du Calcul des probabilités à la théorie du jeu d'adresse. — Ce passage se fait par l'assimilation du jeu d'adresse à un jeu de hasard dans lequel un point matériel serait lancé au hasard sur un panneau vertical limité inférieurement par le segment rectiligne sur lequel se trouve le point visé, latéralement par les verticales des extrémités de ce segment, et supérieurement par une courbe caractéristique des circonstances dans lesquelles le point matériel est lancé. Cette courbe est indéterminée dans une infinité simple de positions possibles à priori, et de l'une à l'autre desquelles on passe par une translation parallèle à la base rectiligne du panneau ; elle jouera le même rôle que la courbe de probabilité des erreurs ; en particulier son équation

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 43 (1924), p. 316, de la première partie.

renfermera un paramètre qui exprimera l'adresse du joueur : dans le cas d'un panneau exponentiel, ce sera le poids h^2.

Le point matériel lancé au hasard rencontre le panneau, glisse le long de la verticale du point atteint, et s'arrête sur le segment horizontal de base. La lecture en son point d'arrêt, sur cette droite graduée, est assimilée à la mesure considérée dans la théorie des erreurs.

Pour tenir compte de l'existence de la partie aliquote minimum, il y a lieu de partager en segments égaux la base graduée du panneau : la longueur de chaque segment sera assimilée à la partie aliquote minimum de la mesure, et la lecture efficace au point d'arrêt du projectile sera l'abscisse du point milieu du segment auquel appartient ce point d'arrêt. — De l'une à l'autre des limites imposées par l'approximation des mesures, les seules positions de la courbe supérieure du panneau, et par conséquent les seules configurations de celui-ci qu'il y a lieu de considérer sont celles dans lesquelles un point déterminé de cette courbe a même abscisse que le point milieu de l'un des segments dans lesquels la droite de base est divisée : si le panneau est exponentiel, son sommet sera ce point déterminé de son bord supérieur.

Les problèmes fondamentaux, dont l'application aux résultats des mesures directes et indirectes constituera la théorie des erreurs, sont alors les suivants :

1° Un panneau est entièrement défini, sauf, parmi ses positions possibles moyennant un degré de liberté, la position de sa courbe supérieure ; un point matériel a été lancé ; on a lu l'abscisse moyenne du segment où ce point s'est arrêté ; on demande la configuration la plus probable du panneau.

2° Sur le panneau du problème précédent, plusieurs points matériels ont été lancés ; après lectures aux points d'arrêt, on demande la configuration la plus probable du panneau.

3° n panneaux sont entièrement définis, sauf, pour chacun d'eux, l'indétermination signalée dans les énoncés précédents ; les configurations de tous les panneaux dépendent d'une seule variable, en ce sens que les abscisses des points de repère des bords supérieurs ont simultanément la même valeur ; un point matériel a été lancé sur chaque panneau ; après lectures aux points d'arrêt, on demande la valeur la plus probable de la variable indépendante qui règle la configuration des divers panneaux.

4° n panneaux sont proposés comme au problème précédent, leurs configurations étant déterminées, cette fois, par les valeurs numériques données à m ($m < n$) paramètres indépendants ($x, y, z, ...$) ; il en serait ainsi dans une série de panneaux dont les courbes supérieures auraient des positions réglées simultanément par un mécanisme à m degrés de liberté ; un point matériel a été lancé sur chaque panneau ; après lectures aux points d'arrêt, on demande les valeurs les plus probables des paramètres indépendants ($x, y, z, ...$).

Appliquées à la théorie des erreurs, dans le cas particulier habituel des panneaux exponentiels, les solutions de ces problèmes fournissent respectivement : la mesure elle-même, — la moyenne arithmétique des mesures, — leur moyenne par poids, — les valeurs finales des inconnues dans le problème des moindres carrés.

N° 7.

Sur un projet de réforme du calendrier grégorien

par M. E. Pasquier (1)

1. Afin de fixer les idées, je commence par certaines notions extrêmement élémentaires, généralement bien connues.

La terre étant considérée comme un solide ayant un centre, j'appelle *jour*, en général, le temps que met la terre pour faire un tour par rapport à des axes de direction déterminée et qui passent par son centre. En astronomie, on distingue le jour sidéral, le jour solaire vrai, le jour solaire moyen. *Dans la vie civile*, que nous avons ici uniquement en vue, le jour en un lieu de la terre est un jour solaire moyen, dont l'origine est établie par l'application du principe des fuseaux horaires avec Greenwich comme méridien. Le jour civil comprend 24 heures, l'heure 60 minutes, la minute 60 secondes.

En général, l'*année* est le temps que met le centre de la terre pour faire une révolution par rapport à des axes de direction déterminée et qui passent par le centre du Soleil. En astronomie, on distingue diverses espèces d'années suivant les axes auxquels on rapporte le mouvement. En particulier, l'*année tropique* est le temps que met le centre de la terre pour faire une révolution par rapport à un système d'axes rectangulaires héliocentriques $Sxyz$ dans lequel le plan Sxy est le plan de l'écliptique et l'axe des x, dirigé vers le point vernal (ou équinoxe du printemps). Il résulte de cette définition qu'après une année tropique, les saisons reviennent aux mêmes dates de l'année. En jours solaires moyens, l'année tropique,

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 43 (1924), p. 326, de la première partie.

qui ne reste pas rigoureusement constante, est, d'après l'état actuel de la science, approximativement égale à 365,2422.

Quant à l'*année civile*, c'est-à-dire celle qui est employée pour les usages ordinaires de la vie, elle doit évidemment comprendre un nombre entier de jours et pour que les saisons reviennent autant que possible aux mêmes dates de l'année civile, il est nécessaire et suffisant que celle-ci s'écarte elle-même le moins possible de l'année tropique. C'est pour satisfaire à cette double condition que Jules César institua l'année appelée *julienne* et que le pape Grégoire XIII établit lui-même plus tard l'année *grégorienne*.

Dans le calendrier julien, l'année civile, avec le jour civil comme unité, est, en moyenne (1), égale à 365,25. Étant exprimée à l'aide de la même unité, l'année civile, dans le calendrier grégorien, est, en moyenne (2), égale à 365,2425. L'année grégorienne se rapproche donc plus de l'année tropique que l'année julienne ; c'est la raison essentielle de sa supériorité sur cette dernière.

Le moins imparfait des calendriers qui aient été établis (3),

---

(1) Dans le calendrier julien, une année est bissextile quand son millésime est divisible par quatre.

(2) Dans le calendrier grégorien, sur quatre cents ans, il y a trois années bissextiles de moins que dans le calendrier julien : ce sont celles dont le millésime, terminé par deux zéros, n'est pas divisible par quatre cents.

Mäller et Glasenapp ont bien proposé de modifier cette règle d'intercalation des bissextiles : d'après ces astronomes, au lieu de supprimer comme bissextiles les années dont le millésime, terminé par deux zéros, n'est pas divisible par quatre cents — ce qui revient à supprimer une bissextile sur 133,33 années, — on pourrait supprimer une bissextile sur cent vingt-huit ans. De cette manière, la longueur moyenne de l'année civile serait sensiblement égale à la longueur admise pour l'année tropique ; mais l'année grégorienne en est déjà elle-même si rapprochée et le procédé d'intercalation des bissextiles dans le calendrier grégorien est si simple et ce calendrier si répandu qu'il vaut mieux le conserver *à ce point de vue*.

(3) A la fin de cette communication, je rappellerai la notion du calendrier Searle où, tout en conservant sur quatre cents ans une année moyenne égale à celle du calendrier grégorien, on adopte des années *communes* de cinquante-deux semaines et des années *intercalaires* de cinquante-trois semaines. Comme on le verra, ce calendrier présente sur le calendrier grégorien un sérieux avantage théorique

le calendrier grégorien est actuellement de loin le plus répandu. Il fut instauré dans les pays catholiques en 1582, ou peu d'années après ; l'Allemagne et la Hollande, nations protestantes, l'admirent le siècle suivant, en 1669 ; l'Angleterre en 1752, époque à laquelle il fut introduit en Amérique par les Européens. Abstraction faite de son ère, il fut adopté par le Japon le 1 janvier 1873 et par la Chine le 12 février 1912. Il fut adopté par la Bulgarie en 1916, par la Russie en 1918, par la Roumanie et la Tchéco-Slovaquie en 1919 et enfin par la Grèce en 1923.

De leur côté, la plupart des chefs des églises autocéphales orthodoxes, réunis à Constantinople sur l'invitation du Patriarche œcuménique, décidèrent le 10 mai 1923 de faire usage, à partir du 1 octobre suivant, d'un calendrier qui diffère à peine (1) du calendrier grégorien. Ce calendrier est donc devenu à peu près universel.

Dans le même calendrier grégorien, on utilise ce qu'on appelle l'*ère chrétienne*, c'est-à-dire qu'on y compte les années à partir d'une date que le fondateur de cette ère a prise comme étant l'année de la naissance du Christ. En réalité, on est généralement d'accord pour reconnaître que cette naissance est antérieure à l'ère chrétienne, la différence des deux étant de six années, si pas davantage.

Faut-il ajouter que dans le calendrier grégorien, l'année est divisée en 12 mois et qu'elle comprend 52 semaines, plus 1 jour si l'année est *commune*, plus 2 jours si l'année est *bissextile* ?

2. Ces notions étant rappelées, je remarque une fois pour toutes que dans le projet de réforme que j'ai en vue, on ne songe pas à faire subir à notre calendrier ordinaire de profondes modifications ; ce à quoi l'on vise, c'est à l'améliorer dans certains détails.

Nous commencerons par indiquer certains points qui doivent être maintenus.

Et d'abord, la longueur du jour et la longueur de l'année dont nous nous servons dans la vie civile étant en relation

---

et le procédé d'intercalation des années de cinquante-trois semaines y est presque aussi simple que le procédé d'intercalation des bissextiles rappelé à la note précédente.

(1) Pour plus de détails v. M. MILANKOVITCH *Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender der orientalischen Kirchen*, dans ASTR. NACHR., t. 220, n° 5279, pp. 379-384

étroite avec des divisions naturelles du temps, on ne songe pas à les abandonner comme unités pour en adopter d'autres qui n'auraient pas le même avantage.

On ne songe pas non plus à modifier l'époque à partir de laquelle on compte les années de l'ère chrétienne. En d'autres termes, bien qu'on estime généralement que Jésus-Christ est né à peu près six ans plustôt que ne le pensait le fondateur de notre ère, personne ne songe à demander que l'année actuelle, appelée 1924, soit dorénavant appelée l'année 1930.

Si l'on voulait en effet constamment modifier l'appellation d'une année en ayant égard à l'état de nos connaissances, notre année 1924 devrait être appelée 1932 (et non 1930) le jour où il serait prouvé qu'il est plus exact d'admettre que Jésus-Christ est né non six ans, mais huit ans avant notre ère. Ce que nous venons de dire de l'année 1924 se répéterait pour les autres années, de sorte qu'avec un tel procédé, tout en cherchant plus d'exactitude, on aboutirait définitivement à plus de complications. Dans ces conditions, bien que l'origine de notre ère ne réponde qu'imparfaitement à l'intention de son auteur, on aura soin de ne pas changer cette origine.

Eu égard à nos habitudes, il ne peut non plus être question de remplacer, *d'une façon courante*, pour les usages civils, les divisions duodécimales du jour par des divisions décimales et ce que nous venons de dire des divisions du jour peut se répéter pour les divisions de l'année.

Comme les notions de jour et d'année, celles de mois et de semaine remontent à la plus haute antiquité ; elles sont elles-mêmes très commodes et il n'est pas non plus question de les abandonner.

3. Déjà, dans la vie courante, on trouve un inconvénient assez sérieux à devoir souvent consulter le calendrier de l'année pour connaître le jour de la semaine qui correspond à une date déterminée. Un inconvénient du même genre mais bien plus fréquent se rencontre en matière de comptabilité et de statistiques commerciales ou industrielles : c'est ce qui arrive, par exemple, dans les banques, à propos des dates de versements ou de retraits des comptes de quinzaine ; c'est ce qui arrive aussi dans l'industrie pour les dates de payement des ouvriers ; c'est ce qui arrive encore pour les Bons du Trésor escomptés, etc.

Les inconvénients ici visés disparaîtraient au moins en

partie si l'on pouvait rendre le calendrier *perpétuel*, c'est-à-dire si les jours de semaine se reproduisaient chaque année aux mêmes quantièmes du mois.

Tout en conservant à l'année grégorienne son nombre total de jours et le procédé ordinaire d'intercalation des bissextiles, on arrive aisément au résultat désiré en ne donnant pas le nom d'un jour de semaine à un ou deux jours de l'année suivant que l'année en cause est commune ou bissextile. De cette manière, l'année comprend 52 semaines, plus un jour supplémentaire lors d'une année commune, plus deux jours supplémentaires lors d'une année bissextile. Les jours supplémentaires dont il s'agit sont ce qu'on appelle souvent les *jours blancs*, ou *jours hors cadre*, ou *jours hors texte* ; je préfère l'expression de *jours hors semaine*, qui est plus caractéristique.

Une fois que le principe d'introduire dans le calendrier grégorien des jours hors semaine est accepté, ce calendrier devient perpétuel, si l'on distribue les mois de la façon qui va être indiquée.

Et d'abord, les 52 semaines d'une année peuvent être considérées comme se composant de 13 fois 28 jours. Cette constatation a fait songer à diviser l'année en 13 mois de 28 jours chacun. Un calendrier qui serait ainsi composé serait le meilleur à un certain point de vue, puisque, abstraction faite des jours hors semaine, tous les mois y seraient composés chacun d'un même nombre entier de semaines. Par suite, chaque mois, les mêmes jours de la semaine se reproduiraient aux mêmes quantièmes et cela quelle que soit l'année. Un tel calendrier est donc bien perpétuel. Il est spécialement préconisé aux États-Unis et au Canada. Il présente cependant l'inconvénient de contrarier assez profondément nos habitudes : les calendriers dont nous nous servons comprennent seulement 12 mois et ils ont de plus l'avantage très apprécié dans les établissements d'instruction, la finance et l'industrie, de diviser l'année en deux semestres et en quatre trimestres.

Un second moyen, généralement préféré, de rendre perpétuel un calendrier grégorien en recourant à l'introduction des jours hors semaine, est de partager les 364 jours de semaine dont se compose l'année en quatre trimestres égaux, chacun de 91 jours, ces 91 jours comprenant eux-mêmes deux mois de 30 et un mois de 31 jours. Dans un tel calendrier, si le mois

de 31 jours occupe toujours la même place dans chaque trimestre, il en sera nécessairement de même de chacun des jours de la semaine et le calendrier ainsi formé sera lui-même perpétuel.

On n'oubliera pas que dans les deux calendriers perpétuels dont il vient d'être question, on est obligé, pour avoir l'année complète de 365 ou de 366 jours, d'introduire un ou deux jours hors semaine suivant qu'il s'agit d'une année commune ou d'une année bissextile.

L'emplacement de ces jours hors semaine est rela ivement secondaire ; je ne m'y arrête pas dans cet exposé succinct des projets de réforme actuellement en présence.

Je ne m'occupe pas davantage du point de savoir par quel jour de semaine il conviendra de commencer les années, pas plus que du point de savoir si, conformément à la proposition de M. Deslandres, il vaut mieux reporter le 1 janvier au 22 décembre actuel, afin de commencer les trimestres avec les saisons. En ce qui concerne les douze mois dont se compose notre année civile, on est naturellement d'avis qu'il conviendrait de modifier au moins les noms des quatre derniers, qui ont des dénominations ne correspondant pas aux places qu'ils occupent.

La date de la fête de Pâques est pour beaucoup de personnes une date de repos ou de vacances ; elle est souvent aussi une date servant de point de départ pour des réunions ou l'exécution de certains travaux ; de cette date dépendent en outre les dates des fêtes mobiles. La fête de Pâques pouvant tomber entre le 23 mars et le 25 avril, et ses variations présentant des inconvénients, même pour la distribution des trimestres ou des matières d'enseignement, on a souvent exprimé le vœu de voir cette date stabilisée ; plusieurs ont, par exemple, proposé de la fixer au 1 dimanche d'avril.

4. La réforme du calendrier grégorien a souvent été discutée dans des articles de revues, dans des livres, aux académies, aux chambres de commerce, etc.

Fondée à Bruxelles en 1919, l'Union astronomique internationale, qui s'est réunie pour la première fois en congrès à Rome au mois de mai 1922, s'en est elle-même occupée. Sa Commission 32, appelée la *Commission du calendrier*, était présidée par M. Bigourdan, le président actuel de l'Académie des Sciences de Paris ; elle a consacré quatre séances

à ses délibérations. Les idées développées jusqu'ici dans cette communication ne différant pas essentiellement de celles qui ont inspiré la Commission 32 elle-même, il me suffira (1) de signaler les trois résolutions principales qu'elle a prises Les voici :

« Adoption d'un calendrier perpétuel en conservant les 52 semaines, plus 1 ou 2 jours hors cadre.

« Placer le 1er janvier au jour actuellement occupé par le 22 décembre.

» Diviser les 364 jours en 4 parties de 91 jours chacune, soit deux mois de 30 jours et un de 31, sans faire obstacle à une division auxiliaire par 14 et 28 jours » (2).

---

(1) Pour les détails relatifs à la Commission 32, voir les pp.114-119, 182-194, des TRANSACTIONS OF THE INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION, vol. I, edited by Prof. A. Fowler, F. R. S. (General Secretary), London, Imperial College Bookstall, Prince Consort Road, S.W. 7. Les pp. 114-119 constituent le rapport préparatoire de M. Bigourdan ; les pp. 182-188 contiennent les procès-verbaux des séances préparés par le Président (M. Bigourdan) et signés par lui et par le Secrétaire (M. Chauve-Bertrand). Les pp. 189-194 comprennent deux annexes, l'une due à M. A. A. Nyland, l'autre à M. D. Eginitis. Les pp. 182-194 ont été réunies en un tiré à part.

(2) La division auxiliaire dont il est ici question, proposée par M. Delaporte, a pour objet de répondre à certains besoins économiques. En 1919, la Société d'encouragement pour l'Industrie nationale (Paris) avait déjà recommandé cette division aux personnes intéressées et la Commission 32 n'a fait que se rallier au vœu de la Société d'encouragement. (Cf. BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE, juillet-août 1919).

Parmi ceux qui, à ma connaissance, se sont le plus occupés pendant ces tout derniers temps de la réforme du calendrier, je me borne à citer ici MM. Bigourdan, A. Phillips, D. Eginitis, J. G. Hagen, Chauve-Bertrand et A. Baar. On doit, entre autres, à ces trois derniers, les travaux que voici :

J. G. HAGEN, *Die Reform des Gregorianischen Kalenders*, dans les STIMMEN DER ZEIT, vol. 106, 1923-24, fasc. 3-4, pp. 148-151 ;

CHAUVE-BERTRAND, *La question du Calendrier*, Paris, 1921 ;

ARMAND BAAR, *La réforme du calendrier*, dans le BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ BELGE D'ASTRONOMIE, numéros de juin et de juillet-août 1923 ;

CHAUVE-BERTRAND et ARMAND BAAR, *De progressione calendarii juliano-gregoriani sub triplici aspectu scientifico, practico ac religioso considerata*, dans les EPHEMERIDES LITURGICAE, numéros 9, 10 et 12. Rome, 1923.

5. A son tour, la Société des Nations vient d'intervenir en vue de la réforme du Calendrier. Comme le Congrès de Rome, les chambres de commerce, etc., qui se sont occupés de la question pendant ces dernières années, la Société des Nations, ou plus exactement la Commission des communications et du transit a, dans sa séance du 1 septembre 1922, exprimé l'avis qu'en pareille matière, il est nécessaire de connaître avant tout l'opinion des autorités religieuses. En conséquence, le Président de la Commission, M. Fernandez y Medina, adressa en juillet 1923 une invitation au St-Siège, au Patriarche de Constantinople et à l'Archevêque de Cantorbéry. Chacun des invités envoya un délégué à Genève pour la fin d'août 1923. Ces délégués sont : pour le St-Siège, le R. P. Gianfranceschi, Président de l'Académie des *Nuovi Lincei* ; pour le Patriarche œcuménique, le professeur Eginitis, Directeur de l'Observatoire d'Athènes et, pour l'Église anglicane, le Rév. T. E. R. Phillips, actuellement Secrétaire de la *Royal Astronomical Society*. A la séance du 30 du même mois, après avoir siégé avec la Commission des communications et du transit, les trois délégués ecclésiastiques furent invités à se réunir en sous-commission pour délibérer avec trois membres de la susdite Commission des communications et du transit. Cette sous-commission prit les résolutions suivantes :

1° A un point de vue strictement dogmatique, en ce qui concerne la fixité de la fête de Pâques et d'autres questions plus générales, la réforme du calendrier grégorien ne se heurte pas à des difficultés de nature telle que l'on puisse les considérer comme insurmontables ;

2° De l'avis de tous, aucune réforme du calendrier et notamment aucune décision relative à la fixité de la fête de Pâques n'est pratiquement désirable sans impliquer un accord entre les diverses autorités religieuses intéressées ;

3° Les changements des traditions existantes qu'entraîne toute réforme ne sont justifiables et acceptables que s'ils sont demandés nettement par l'opinion en vue d'une amélioration certaine de la vie publique et des relations économiques.

Comme suite à ces résolutions, la Commission des communications et du transit décida de poursuivre l'examen de la question par l'institution d'un *Comité consultatif* qui serait présidé par M. Van Eysinga et dont les délégués des trois Églises feraient partie, ainsi que M. Bigourdan et M. Booth.

Président de la Chambre de commerce internationale. Il a, en outre, été convenu que ce Comité prendrait comme base le projet adopté au Congrès de Rome en 1922 et que les résolutions qui précèdent seraient communiquées aux gouvernements et aux autorités religieuses intéressés, qui seraient priés de bien vouloir faire connaître, avant le 1er mars 1924, leurs observations et suggestions jugées utiles.

Quant au Comité consultatif, il doit lui-même se réunir à Paris le 19 mai prochain.

6. Les procédés envisagés jusqu'à présent dans cette note en vue de rendre perpétuel un calendrier grégorien exigent l'introduction des jours blancs et par conséquent la rupture de la continuité de la semaine, donc l'abandon d'un usage plusieurs fois millénaire.

Il existe, cependant, un autre moyen de réaliser le desideratum du calendrier perpétuel sans avoir l'inconvénient qu'entraîne l'introduction des jours blancs.

Ce procédé est dû à l'astronome américain G. H. Searle qui l'a publié (1) il y a une douzaine d'années et sur lequel le P. Hagen, Directeur de l'Observatoire du Vatican, est revenu recemment (2) et après lui, M. William F. Rigge (3).

Le procédé de Searle auquel je fais maintenant allusion peut s'énoncer comme suit :

Il y aurait deux sortes d'années, l'année commune de 364 *jours en* 52 *semaines et l'année intercalaire de* 371 *jours en* 53 *semaines. En général, une année serait intercalaire si son millésime est divisible par* 5 ; *il y aurait exception pour les années dont le millésime est divisible par* 50 *et aussi sur un cycle de* 400 *ans, pour une autre année quelconque dont le millésime est divisible par* 5.

On notera que dans le procédé actuellement considéré, la moyenne des années au bout de 400 ans est la même que la moyenne des années grégoriennes au bout du même temps.

Cette dernière moyenne est, en effet — on le sait — de 365 jours 2425 ; 400 pareilles années comprennent donc un

---

(1) Cf. PUBLICATIONS OF THE ASTRONOMICAL SOCIETY OF THE PACIFIC, vol. 24 (1912), pp. 161 et 162.

(2) STIMMEN DER ZEIT, article cité à la note (3) de la p. 1.

(3) *The reform of the present Calendar begun*, dans POPULAR ASTRONOMY, vol. XXXII, nº 3, march 1924, pp. 129-133.

nombre de jours égal à 365,2425 × 400, soit 146097 jours ou 20871 semaines. Nous allons voir qu'on arrive au même nombre de semaines en appliquant la règle de Searle. Et d'abord, si toutes les années dont le millésime est divisible par 5 étaient intercalaires, il y en aurait 80 sur 400 ans. Mais aucune année dont le millésime est divisible par 50 n'est intercalaire et, sur 400 ans, il y a 8 années dont le millésime est divisible par 50 ; par suite de cette circonstance, le nombre 80 d'années intercalaires est réduit à 72. D'après la règle de Searle, ce nombre 72 doit encore être réduit d'une unité puisqu'il y a une année qui a d'abord été comptée comme intercalaire et qui ne doit pas l'être. Sur 400 ans, il y a donc définitivement, d'après la règle de Searle, 71 années intercalaires ; par suite, il y a aussi, sur 400 ans, 329 années communes. On retrouve de la sorte, pour les 400 années considérées, les 20871 semaines obtenues déjà d'une autre façon (1).

La règle de Searle — on le voit — est pour ainsi dire aussi simple que la règle d'intercalation des bissextiles dans le calendrier grégorien. De plus, dans le cours du cycle, pour aucune année, le commencement des saisons ne s'écarte de plus de 7 jours de ce qu'est ce commencement dans l'année grégorienne.

Quant à la 53e semaine d'une année intercalaire, on la place où l'on juge bon, au commencement, au milieu ou à la fin de l'année.

Dans ces conditions, beaucoup estimeront sans doute qu'en principe, pour rendre perpétuel le calendrier grégorien, on

---

(1) A la note (2) de la page 150 de son article, le P. Hagen signale une note que le Baron G. Bedeus a publiée en 1923, sous le titre *Die Regeln des Reformkalenders*. Indépendamment de Searle, l'auteur veut, comme ce dernier, éviter les jours hors semaine et arrive comme lui à deux espèces d'années, des années communes de cinquante-deux semaines et des années intercalaires de cinquante t ois semaines. Mais le procédé d'intercalation est différent : d'après le procédé Bedeus, pendant cinquante ans, il y aurait une année intercalaire tous les cinq ans ; pendant les quatre-vingt-dix années subséquentes, ce serait tous les six ans ; puis, tous les huit cent quatre-vingt-seize ans, on devrait réduire d'une unité le nombre d'années intercalaires. Au lieu de « réduire d'*une* unité », il faut « réduire de *deux* unités, le cycle y est bien de 896 ans ; l'année moyenne y est de $\left(365,25 - \frac{1}{128}\right)$ jours et le nombre d'intercalaires, de 159.

fera mieux d'adopter les années intercalaires de Searle que de rompre la continuité de la semaine par l'introduction de jours blancs.

Toutefois, on peut se demander si les inconvénients, dans un même calendrier, de l'emploi de deux systèmes d'années différant entre elles d'une semaine entière ne seront pas considérés comme suffisants (*) pour porter le Comité consultatif et surtout les gouvernements et la Commission des communications et du transit à rejeter un pareil calendrier Searle, malgré ses avantages théoriques incontestables.

En tous cas, ceux qui ont un avis à émettre en cette matière feront bien de noter encore que sur 400 ans, il n'y a, dans le système Searle, que 71 années intercalaires, de sorte que les inconvénients de ce système ne se reproduiraient en moyenne qu'après 5 ou 6 ans, tandis que l'inconvénient de l'introduction d'un ou de deux jours hors semaine se présenterait chaque année.

On voit encore que si l'on décidait d'adopter en 1926 le calendrier Searle et de prendre l'année 1930 comme année commune, les premières années intercalaires seraient 1935, 1940, 1945, 1955,...

(*) Pour certains services d'intérêt général tels que ceux de comptabilité et de statistiques.

N° 8.

La Construction du Calendrier

par M. M. Alliaume (1)

1. — **L'année tropique.** — Dans sa signification primitive, et antérieurement aux précisions que permet l'astronomie géométrique et cinématique, l'*année* est la période moyenne des phénomènes météorologiques, des phénomènes de végétation. Sous une latitude terrestre déterminée ces phénomènes sont liés à la hauteur du Soleil à l'instant de son passage au méridien supérieur, ou, aussi bien, aux azimuts dans lesquels le Soleil se lève et se couche. La latitude étant donnée, cette hauteur et ces azimuts sont connus en même temps que la *déclinaison du Soleil*. L'année est donc, dans un commencement de précision géométrique, la période au bout de laquelle la déclinaison du Soleil, variant dans le même sens, repasse par la même valeur. Cette définition fixe la *durée* de l'année ; elle ne lui impose pas une *origine* : cette origine sera imposée par une valeur numérique de la déclinaison du Soleil et par un sens déterminé de sa variation, accroissement ou diminution. Que cette valeur numérique soit zéro et ce sens un accroissement : les années sont des durées consécutives limitées aux instants où la déclinaison du Soleil est nulle, devenant positive de négative qu'elle était.

Mais la déclinaison du Soleil est, en valeur absolue, l'angle que fait avec le plan de l'équateur sa direction géocentrique ; et l'*équinoxe de printemps* est l'une des deux demi-droites d'intersection du plan de l'équateur et du plan de l'écliptique, à savoir celle suivant laquelle s'annule la déclinaison du Soleil, devenant positive de négative qu'elle était. L'année est donc le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil à l'équinoxe de printemps. Cette durée porte, en particulier, le nom d'*année tropique*, par opposition à d'autres durées peu différentes et auxquelles on a donné le même nom d'année, moyennant d'autres qualificatifs.

Le jour solaire moyen est défini de façon que sa durée soit dans un rapport constant avec la durée de la rotation de la Terre par rapport à l'ensemble des étoiles. L'année tropique renfermerait donc un nombre invariable (non nécessairement entier) de jours solaires moyens si l'équinoxe de printemps gardait une direction invariable par rapport à l'ensemble des étoiles, et il en serait ainsi, en particulier,

(1) *Ciel et Terre*, t. XL (1924), p. 141.

si les plans de l'équateur et de l'écliptique gardaient une orientation invariable par rapport à l'ensemble des étoiles. L'année tropique s'exprimerait encore par un nombre invariable de jours solaires moyens si l'équinoxe de printemps, se déplaçant dans le plan de l'écliptique, effectuait ce déplacement d'une manière uniforme par rapport à l'ensemble des étoiles, par exemple si, par rapport à l'ensemble des étoiles, l'équinoxe de printemps allait à la rencontre du Soleil, *rétrogradait*, d'un angle constant par année tropique : dans les résultats des calculs astronomiques ceci se reconnaîtrait à ce que la rétrogradation totale de l'équinoxe, à partir d'une époque déterminée, s'exprimerait par une fonction du premier degré du temps exprimé, par exemple, en années tropiques.

Il n'en est pas ainsi : d'après les calculs de S. Newcomb et les formules de la *Connaissance des temps* (limitées au terme du second degré), la rétrogradation de l'équinoxe dans le plan de l'écliptique (précession générale en longitude), depuis le début de 1900 (1900,0) jusqu'à l'époque 1900,0 + t, où t est exprimé en années tropiques, est

$$\lambda = 50'',25641\, t + 0'',00011115\, t^2.$$

C'est à cet accroissement de la rétrogradation de l'équinoxe, proportionnel à 0'',00011115 par an, qu'est due la variabilité de l'année tropique. Aussi la *Connaissance des temps* donne-t-elle pour cette durée, à une époque t, comptée à partir du midi moyen du 1er janvier 1900, et exprimée en années juliennes de 365,25 jours solaires moyens, non pas une constante, mais une expression qui renferme la variable t :

$$T = (365,24219647 - 0,0000000624\, t) \text{ jours sol. moy.}$$

Voici, d'après cette formule, la durée de l'année tropique de quatre en quatre siècles, à partir du début de l'ère chrétienne :

an 0	T = 365j,2423 1503
400	365 ,2422 9007
800	365 ,2422 6511
1200	365 ,2422 4015
1600	365 ,2422 1519
2000	365 ,2421 9023
2400	365 ,2421 6527
2800	365 ,2421 4031
3200	365 ,2421 1535
3600	365 ,2420 9039
4000	365 ,2420 6543

La construction d'un calendrier repose essentiellement sur la valeur invariable approchée, adoptée comme durée de l'année tropique. Le calendrier julien est basé sur la valeur T = 365,25 : l'approximation de cette valeur est si grossière qu'au bout de seize siècles, à l'époque de la réforme grégorienne, l'accumulation des erreurs formait un écart de dix jours entre les dates du calendrier et les époques du commencement des saisons. La réforme grégorienne a adopté la valeur T = 365,2425, qui a été exacte un grand nombre de siècles avant notre ère et qui le sera désormais de moins en moins. Il semble suffisant, ici, de considérer une durée d'année tropique qui s'exprime en jours solaires au moyen de quatre décimales, approximation à laquelle, actuellement, T = 365,2422. Le tableau suivant donne les époques pendant lesquelles pareille approximation est valable, pour les diverses valeurs de 365,2420 à 365,2425.

T = 365,2425	de l'an — 3765	à l'an — 2163
365,2424	— 2163	— 561
365,2423	— 561	+ 1042
365,2422	+ 1042	+ 2644
365,2421	+ 2644	+ 4247
365,2420	+ 4247	+ 5850

2. — **Calendriers à jours intercalaires.** — Le *calendrier julien* et le *calendrier grégorien* sont des calendriers à jours intercalaires. L'*année civile* y est la suite d'un nombre entier de jours solaires moyens consécutifs, dont l'ensemble est aussi proche que possible, soit par défaut, soit par excès, de l'année tropique; d'où l'*année civile par défaut,* de 365 jours, et l'*année civile par excès*, de 366 jours.

Pour une valeur approchée constante T, attribuée à l'année tropique, le calendrier doit définir une *période* comprenant des nombres constants d'années civiles par défaut et d'années civiles par excès, et dont la durée totale est égale à la durée totale du nombre correspondant d'années tropiques. Si T continue à être exprimé, à l'approximation convenue, en jours solaires moyens, et si a et b sont respectivement les nombres d'années civiles par défaut et d'années civiles par excès que comportera la période $(a + b)$ du calendrier, ces inconnues a et b sont les deux moindres nombres entiers positifs satisfaisant à l'équation linéaire et homogène

$$T\,(a + b) = 365\,a + 366\,b;$$

ce sont donc, aussi bien, les deux termes de la fraction $\frac{a}{b}$, réduite à sa plus simple expression, racine de l'équation

$$T\left(\frac{a}{b}+1\right)=365\,\frac{a}{b}+366,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b}=\frac{366-T}{T-365}\ (1).$$

Avec les diverses approximations prévues ci-dessus, on obtient :

$T =$	$a+b =$	$a =$	$b =$
365,2420	500	379	121
365,2421	10000	7579	2421
365,2422	5000	3789	1211
365,2423	10000	7577	2423
365,2424	1250	947	303
365,2425	400	303	97

Toutes choses égales, le meilleur calendrier est celui dans lequel la période $(a+b)$ est la plus courte, et, pour l'année tropique de 365,2425 jours solaires, on reconnaît le calendrier grégorien, avec sa période de quatre siècles, ses 303 années communes et ses 97 années bissextiles.

Parmi les autres valeurs considérées de l'année tropique, toutes fournissent des périodes qui sembleront trop longues, sauf la valeur 365,2420 jours solaires. Dès le seizième siècle, où fut créé le calendrier grégorien, cette valeur était meilleure que celle qui a été adoptée dans la formation de ce calendrier, et l'erreur qui lui correspond ne fera que diminuer. Sa période est de cinq siècles, du même ordre que la période grégorienne; cette période comporte 379 années communes et 121 années bissextiles; par exemple seraient bissextiles les années dont le millésime est divisible par 4, sauf les quatre premières années séculaires de la période.

3. — **Calendriers à semaines intercalaires.** — Les années civiles des calendriers à jours intercalaires ont une durée égale à 52 semaines plus un ou deux jours. Il en résulte que les mêmes dates des années consécutives ne peuvent pas ramener les mêmes jours de la semaine,

(1) Avant toute réduction, les deux termes de cette fraction sont des fractions décimales écrites (à l'approximation actuelle) au moyen de quatre chiffres après la virgule et dont la somme est l'unité : la plus longue période possible est donc de 10 000 années.

d'où (entre autres inconvénients) l'impossibilité de fixer la fête de Pâques, qui doit être un dimanche. Les projets de réforme du calendrier actuellement à l'étude ont pour objet de remédier à ce défaut du calendrier grégorien (1). La solution généralement adoptée consiste, avec diverses modalités, dans l'introduction d'un jour hors semaine dans les années communes, de deux pareils jours dans les années bissextiles : l'année civile renfermerait 52 semaines plus un ou deux jours sans nom, et le premier jour de l'année porterait toujours le même nom.

Les chronologistes s'opposent à cette solution qui romprait la continuité de la semaine, tandis que celle-ci est la seule période qui se soit poursuivie sans interruption depuis une époque très reculée (sauf en France pendant les quelques années qu'a duré le calendrier républicain).

Il y a une douzaine d'années, un Américain, le P. Searle, a proposé un calendrier qui concilie la correspondance uniforme des dates et des noms de jours avec la continuité de la semaine (2), et ce projet semble devoir être, dans quelques jours, considéré avec attention par le comité consultatif chargé par la Société des Nations de l'étude de la réforme du calendrier. Le calendrier ainsi proposé repose sur la définition suivante de l'année civile : l'année civile y est la suite d'un nombre entier de *semaines* consécutives, dont l'ensemble est aussi proche que possible, soit par défaut, soit par excès, de l'année tropique; d'où l'année civile par défaut de $7 \times 52 = 364$ jours, et l'année civile par excès de $7 \times 53 = 371$ jours.

Si T est, comme précédemment, en jours solaires moyens, la valeur adoptée de l'année tropique, et si a et b sont respectivement les nombres d'années civiles par excès que comportera la *période* $(a + b)$ du calendrier, ces inconnues a et b sont les deux moindres nombres entiers positifs satisfaisant à l'équation linéaire et homogène

$$T(a + b) = 364\,a + 371\,b;$$

(1) La littérature récente de la question est abondante. Articles de mise au point : G. Bigourdan, « Projet de réforme du calendrier civil actuel », *Comptes-Rendus Paris*, t. 168 (1919, 1), p. 21 ; — H. Deslandres, « Sur la réforme du calendrier », *Comptes-Rendus Paris*, t. 168 (1919, 1), p. 133; — E. Pasquier, « Sur un projet de réforme du calendrier grégorien », *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 43 (1924), p. 220 de la première partie.

(2) G. M. Searle, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, t. 24 (1912), p. 161. Article récent : W. F. Rigge, « The reform of the present calendar begun », *Popular Astronomy*, t. 32 (1924), p. 129.

ce sont, aussi bien, les deux termes de la fraction

$$\frac{a}{b} = \frac{371 - T}{T - 364}$$

réduite à sa plus simple expression (1).

Avec les diverses valeurs de T prévues au numéro précédent, on obtient :

$T = 365{,}2420$	$a + b = 3500$	$a = 2879$	$b = 621$
365,2421	70000	57579	12421
365,2422	35000	28789	6211
365,2423	70000	57577	12423
365,2424	8750	7197	1553
365,2425	400	329	71

La seule valeur acceptable de l'année tropique, eu égard à la période qui en résulte, est la valeur grégorienne de 365,2425 jours. La période correspondante n'est que de quatre siècles, comme dans le calendrier grégorien : c'est le calendrier proposé par le P. Searle, avec 329 années par défaut et 71 années par excès; les années par excès y sont (le plus avantageusement) celles dont le millésime est divisible par 5, sauf (à l'exception d'une) les années semi-séculaires.

Le théoricien trouvera l'idée du P. Searle fort ingénieuse, et sera séduit par la petitesse de la période de ce calendrier, petitesse due à cette circonstance arithmétique heureuse que les deux nombres

$$10000\,(371 - 365{,}2425) = 57575$$
$$10000\,(365{,}2425 - 364) = 12425$$

admettent un plus grand commun diviseur aussi considérable que 175. Mais, à la réflexion, il trouvera peut-être bien grande cette différence de sept jours entre les durées de l'année commune et de l'année par excès, et s'inquiétera des difficultés qui en résulteraient, particulièrement dans les affaires financières et administratives, ainsi que dans l'établissement et la comparaison des statistiques industrielles, commerciales, démographiques.

4. — **Le meilleur calendrier.** — On considérera ci-dessous comme le meilleur calendrier celui pour lequel la valeur moyenne de l'année est la plus proche de celle de l'année tropique ; cette der-

(1) Avant toute réduction, les deux termes de cette fraction sont des nombres décimaux écrits (à l'approximation actuelle) au moyen de quatre décimales et dont la somme est 7 : la plus longue période possible de pareil calendrier est donc 70 000 années.

nière valeur s'exprimera au moyen de six décimales : $T = 365^j,242196$; de plus, on imposera à la période d'être un nombre entier de siècles, et on s'arrêtera à une période maximum de quatorze siècles.

Ces conditions n'ont rien d'essentiel : elles définissent seulement les circonstances dans lesquelles on s'est placé. Cette recherche n'a été faite que pour un calendrier à jours intercalaires ; elle se ferait de la même manière, mais probablement sans intérêt, pour un calendrier à semaines intercalaires.

Soient n le nombre de siècles de la période, x l'excès du nombre a des années civiles par défaut que renferme la période sur le nombre $75n$ de pareilles années que renfermerait la même durée dans le calendrier julien. La valeur T_0 de l'année moyenne du calendrier ainsi défini est donnée par la formule :

$$T_0 = 365,25 - \frac{x}{100n}.$$

A chaque valeur du nombre entier n correspondent deux nombres entiers consécutifs, x' et x'', qui, substitués à x, définissent un intervalle (T'_0, T''_0) auquel appartient la durée, considérée comme exacte, $T = 365,242196$, de l'année tropique. De quatre à quatorze siècles pour $100n$, ces nombres sont :

$n =$	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14;
$x' =$	3,	3,	4,	5,	6,	7,	7,	8,	9,	10,	10;
$x'' =$	4,	4,	5,	6,	7,	8,	8,	9,	10,	11,	11.

Le tableau suivant renferme les éléments des calendriers correspondants, à savoir, pour une période $P = 100n$: le nombre a des années civiles par défaut, le nombre b des années civiles par exeès, la durée T_0 de l'année moyenne, l'erreur $E = T - T_0$ de cette année. Le meilleur calendrier est celui dans lequel la valeur absolue de cette différence est minimum. Les calendriers ainsi établis ne sont pas nécessairement tous distincts.

P	a	b	T_0	E
400	303	97	365,242 500	—0,000 304
	304	96	365,240 000	+0,00 2196
500	378	122	365,244 000	—0,00 1804
	379	121	365,242 000	+0,000 196
600	454	146	365,243 333	—0,001 137
	455	145	365,241 667	+0,000 529
700	530	170	365,242 857	—0,000 661
	531	169	365,241 429	+0,000 767
800	606	194	365,242 500	—0,000 304
	607	193	365,241 250	+0,000 946

900	682	218	365,242 222	—0,000 026
	683	217	365,241 111	+0,001 085
1000	757	243	365,243 000	—0,000 804
	758	242	365,242 000	+0,000 196
1100	833	267	365,242 727	—0,000 531
	834	266	365,241 818	+0,000 378
1200	909	291	365,242 500	—0,000 304
	910	290	365,241 667	+0,000 529
1300	985	315	365,242 308	—0,000 112
	986	314	365,241 538	+0,000 658
1400	1060	340	365,242 857	—0,000 661
	1061	339	365,242 143	+0,000 053

Parmi les calendriers dont la période (séculaire) ne dépasse pas quatorze siècles, le meilleur est celui dont la période est de 900 ans, avec 682 années communes et 218 années bissextiles; son année moyenne n'a qu'un excès de 0j,000026 sur l'année tropique. C'est le calendrier qui vient d'être adopté (mai 1923) par les églises orthodoxes orientales (russe, grecque, serbe, roumaine) : le calendrier julien a été abandonné, et le lendemain du 30 septembre 1923 s'est appelé le 14 octobre 1923 ; ce n'est que dans 877 ans que le nouveau calendrier orthodoxe aura une discordance d'un jour avec le calendrier grégorien (1). — Le calendrier proposé au n° 2 ci-dessus, avec une période de cinq siècles, se présente en quatrième lieu dans la liste des calendriers de moins en moins bons, et le calendrier grégorien y occupe le rang suivant. Voici le début de cette liste à propos de laquelle il faut rappeler que la qualité du calendrier n'a été estimée que d'après l'approximation de son année moyenne, sans tenir compte de l'avantage que présente une période d'un petit nombre de siècles.

1)	$a+b=$ 900	$a=$ 682	$b=$ 218	E =	—0,000 026
2)	1400	1061	339		+0,000 053
3)	1300	985	315		—0,000 112
4)	500	379	121		+0,000 196
5)	400	303	97		—0,000 304
6)	1100	834	226		+0,000 378

Le 13 mai 1924.

---

(1) E. Pasquier, article cité. M. Pasquier me fait savoir qu'il a rédigé un article intitulé : « Sur les deux espèces d'années entrant dans un calendrier », qu'il présentera à la session d'octobre 1924 de la Société scientifique de Bruxelles. — M. Milankovitch, *Astronomische Nachrichten*, t. 220 (1924), n° 5279

N° 9.

Revue annuelle d'Astronomie

1923

par M. M. Alliaume (1)

—

(*) Sommaire. — *Soleil :* rotation du Soleil, hauteur des filaments ; épaisseur de la couche renversante ; raies du spectre solaire dont l'origine est inconnue (coronium, raie verte de l'aurore boréale, densité de la couronne); température (constante solaire et phénomènes météorologiques, ionisation, nature des protubérances).

Système planétaire : planètes transneptuniennes décelées par les perturbations d'Uranus, des comètes, de Neptune ; planètes intramercurielles, recherches aux points de libration de Mercure ; température des planètes ; pouvoir réfléchissant des planètes et de la Terre, leur grandeur stellaire ; connaissance de l'atmosphère terrestre par l'observation des étoiles filantes ; E. E. Barnard (1857-1923).

Physique stellaire : équilibre thermodynamique d'une étoile, théorie des étoiles géantes (rotation de l'étoile), applicabilité aux étoiles naines, possibilité de densités stellaires très élevées ; le phénomène photoélectrique, application à la photométrie stellaire, étoiles variables.

Structure de l'univers : l'univers galactique, sa forme lenticulaire, discussion de ses dimensions, distance des amas globulaires ; nébuleuses spirales, univers galactiques indépendants ou tourbillons de poussière cosmique.

(*) Un complément à cette *Revue d'Astronomie* pour 1923 paraîtra dans le n° d'octobre 1924 de la Revue des Questions scientifiques, sous le titre *Astronomie et Relativité.*

Abréviations bibliographiques. — R.Q.S. = Revue des Questions scientifiques (Louvain). — C.R. = Comptes rendus des

(1) Revue des Questions scientifiques, 4me série, t. 6 (1924, 2), p. 154.

SOLEIL

Rotation du Soleil. — La rotation d'un astre se déduit de l'observation, suffisamment prolongée, des particularités stables de sa surface. Cette étude permet la détermination de l'axe de rotation, d'où celle de l'équateur, et la possibilité de parler de la latitude d'un point de l'astre. Quant à la période de la rotation, elle ne sera pas nécessairement la même pour chaque série d'observations, par exemple si la surface fluide ou semi-fluide a un mouvement de rotation distribué en plusieurs courants parallèles à l'équateur et dont les vitesses sont inégales : c'est le cas du Soleil.

La rotation du Soleil a été étudiée d'abord par l'observation de ses taches : ce ne sont pas, il est vrai, des éléments permanents, mais leur évolution est souvent assez lente pour qu'on puisse les suivre pendant plusieurs rotations. La vitesse angulaire d'une tache est maximum lorsque celle-ci appartient à l'équateur solaire ; elle diminue progressivement pour les taches situées de part et d'autre de l'équateur, et dont la latitude héliographique augmente en valeur absolue. Carrington a exprimé par la formule

$$14^{\circ},41 - 2^{\circ},75 \sin 7/4\, \varphi$$

le déplacement angulaire héliocentrique, en un jour sidéral, d'une tache dont la latitude héliographique est φ, soit positive, soit négative. Plus récemment, on a préféré représenter les observations par une expression plus simple et Maunder a obtenu :

$$14^{\circ},33 - 2^{\circ},13 \sin^2\varphi.$$

SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS. — PR. R. S. = PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY, Series A, Mathematical and Physical Sciences (Londres). — M.N. = MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY (Londres). — OBS. = THE OBSERVATORY (Londres). — APH. J. = THE ASTROPHYSICAL JOURNAL (Chicago). — AN. J. = THE ASTRONOMICAL JOURNAL (Albany, N.-Y.). — A. S. PAC. = PUBLICATIONS OF THE ASTRONOMICAL SOCIETY OF THE PACIFIC (San-Francisco). — A. N. = ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (Kiel).

En 1922, M. Subbotin (Novotscherkassk) a utilisé les observations de taches faites à Greenwich de 1886 à 1909 (1) ; il a distingué les périodes 1886-1897 et 1898-1909, et a obtenu des résultats sensiblement différents pour ces deux périodes :

$$1886\text{-}1897\ldots\ 15^{\circ},44 - 2^{\circ},66 \sin^2\varphi,$$
$$1898\text{-}1909\ldots\ 15^{\circ},36 - 2^{\circ},05 \sin^2\varphi.$$

La rotation d'un astre peut se déterminer aussi par l'observation spectroscopique de la lumière de ses bords, émanant de deux points de même latitude, l'un se rapprochant, l'autre s'éloignant de l'observateur, et par l'application du principe de Doppler-Fizeau sur le déplacement des raies spectrales d'une source lumineuse dont la distance varie. Ces observations ont été faites jusqu'ici avec le spectre des facules, celui des flocculi de calcium (P. Fox) et celui de la couche renversante (Adams et Leisby) ; elles ont permis d'écrire les expressions suivantes :

Facules	$14^{\circ},47 - 2^{\circ},27 \sin^2\varphi,$
Flocculi	$14^{\circ},56 - 2^{\circ},98 \sin^2\varphi,$
Couche renv.	$14^{\circ},54 - 3^{\circ},50 \sin^2\varphi.$

D'autres formations solaires qui se prêtent souvent à l'observation prolongée sont les *filaments*. Les premiers filaments ont été découverts de 1903 à 1908 à l'Observatoire d'Yerkes, et, après ses recherches de Meudon, H. Deslandres a montré quelle devait être l'importance de ces formations pour l'étude du Soleil. Ce sont de longues lignes noires, localisées de préférence dans les couches supérieures de la chromosphère, et qui apparaissent sur les images spectrohéliographiques du calcium et de l'hydrogène. L. d'Azambuja (Meudon) les étudie depuis plusieurs années (2). En

(1) M. Subbotin, *On the solar rotation period from Greenwich sunspot measures*, 1886-1909, A. N., t. 218 (1923), n° 5209. Il y a lieu d'examiner la loi de probabilité des erreurs employée par l'auteur et présentée comme une généralisation de la loi exponentielle habituelle.

(2) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, R.Q.S., 4me série, t. 2. (1922, 2), p. 174 (p. 7 du tiré-à-part).

1923, il les a utilisés à la détermination de la vitesse angulaire des couches auxquelles ils appartiennent : il a trouvé un déplacement angulaire diurne convenablement exprimé par

$$14^{\circ},45 - 1^{\circ},90 \sin^2\varphi \quad (1).$$

Enfin, tout récemment, l'Observatoire de Greenwich a publié les résultats d'une détermination de la vitesse de rotation du Soleil par l'observation des facules, à savoir un déplacement angulaire diurne égal à

$$14^{\circ},54 - 2^{\circ},81 \sin^2\varphi \quad (2).$$

Le coefficient du terme variable avec la latitude est nettement moindre dans les formules de d'Azambuja ; mais les éléments observés par ce dernier sont élevés dans l'atmosphère solaire, tandis que les formations utilisées dans les autres résultats appartiennent à la surface de l'astre : il faut en conclure que la diminution de vitesse de l'équateur au pôle est d'autant moins marquée que la couche considérée est plus élevée. La rotation de filaments groupés suivant leur altitude pourrait donc faire connaître de quelle manière les couches atmosphériques solaires glissent les unes sur les autres. L. d'Azambuja a précisément mis au point une méthode de détermination de la hauteur des filaments (3) et leur a trouvé des altitudes allant jusque 33.000 km, à peu près la vingtième partie du rayon du Soleil.

(1) L. d'Azambuja, *Mesures nouvelles de la vitesse de rotation des filaments, évaluation de la hauteur de ces objets au-dessus de la chromosphère solaire*, C. R., t. 176 (1923, 1), p. 950.

(2) *The rotation period of the sun derived from measures of solar faculae*, M.N., t. 84 (1923-1924), p. 431. — Les mêmes observations ont été employées à la détermination, par la méthode des moindres carrés, des coefficients d'une expression de la forme

$$a + b \sin^2\varphi + c \sin^4\varphi ;$$

on a trouvé $a = 14^{\circ},49$, $b = -1^{\circ},78$, $c = -3^{\circ},16$; l'approximation est naturellement plus satisfaisante que par la formule à deux termes.

(3) Article de d'Azambuja cité ci-dessus. Pour l'observateur terrestre, une formation élevée de l'atmosphère solaire ne s'observe pas au point de la surface qui appartient à son rayon héliocentrique ;

Épaisseur de la couche renversante. — La couche renversante, qui s'étend au-dessus de la photosphère, et sur laquelle repose, sans discontinuité bien nette, la chromosphère, est caractérisée par un spectre d'émission, un spectre de raies brillantes. Son existence fut découverte par Young pendant l'éclipse totale de 1871. La fente du spectroscope était tangente au bord solaire, au point où devait avoir lieu le premier contact intérieur. Tant qu'il n'y eut pas totalité, le spectroscope montra un spectre d'absorption, raies noires sur fond continu. A l'instant du contact, commencement de la totalité, toutes les lignes obscures se renversèrent, remplacées qu'elles furent par des lignes brillantes. Le phénomène ne dura que deux ou trois secondes nécessaires à ce que la Lune recouvre le mince croissant lumineux (1). C'est le *spectre-éclair*. La durée du phénomène est liée à l'épaisseur de la couche à laquelle il est dû : aux deux ou trois secondes citées tantôt ne correspondait guère qu'une épaisseur de 700 km pour la couche renversante. On a dû pendant longtemps se contenter de cette méthode grossière d'appréciation : si rapide est le phénomène que même la méthode Janssen-Lockyer, pour l'étude spectroscopique des protubérances en dehors des éclipses, ne lui était pas applicable. L'observation de la couche renversante en dehors des éclipses ne fut permise qu'en 1909, par les travaux de Hale et Adams (2). Une variante de cette méthode vient d'être reprise par P. Fox à l'Observatoire d'Yerkes (3).

Ce travail n'est pas terminé et les résultats publiés ne sont présentés que comme provisoires. Il ne semble pas possible de comparer immédiatement les nombres qui constituent ces résultats à l'épaisseur de 700 km estimée

il y a un effet de perspective, ou de parallaxe, et les coordonnées apparentes diffèrent d'autant plus des coordonnées vraies, pour une même situation relative de l'axe solaire et de l'observateur terrestre, et pour une même latitude héliographique, que la formation observée est plus élevée ; d'où, après calcul de la position vraie, une méthode de détermination de l'altitude dans l'atmosphère solaire.

(1) P. Salet, *Spectroscopie astronomique*, Paris, Doin, 1909.

(2) G. Hale et Adams, *Photography of the flash-spectrum without an eclipse*, APH. J., t. 33 (1909,1), p. 222.

(3) P. Fox, *A new method for the measurement of the depth of the chromosphere*, APH. J., t. 57 (1923, 1), p. 234.

ci-dessus. Au fur et à mesure que les méthodes se perfectionnent, le spectre-éclair se montre de moins en moins brusque ; la plus grande sensibilité des instruments fait voir un commencement de renversement des raies dans des couches encore nettement chromosphériques : il faudrait donc d'abord se mettre d'accord sur la définition de la chromosphère et de la couche renversante proprement dite ; les définitions les plus avantageuses pourraient précisément se déduire du travail de Fox ; quoi qu'il en soit, celui-ci trouve une épaisseur de 3000 km environ.

Raies du spectre solaire dont l'origine est inconnue. — L'enseignement se contente souvent de dire que, depuis la découverte de l'hélium sur la Terre, une ligne verte dans le spectre de la couronne, et attribuée au coronium, élément hypothétique, est la seule raie non identifiée du spectre solaire (1).

La réalité n'est pas aussi simple. — En 1910, le Comité de physique solaire publia le tableau des raies dont l'ori-

(1) Les circonstances dans lesquelles on a cru pouvoir affirmer l'existence de cet élément méritent d'être rappelées brièvement. — Le spectre de la couronne put être observé pour la première fois par Young et Horkness pendant l'éclipse totale de 1869. Ce spectre, continu, montrait dans le vert une raie qui fut identifiée avec telle raie chromosphérique, due au fer. Il parut impossible que la couronne renfermât des vapeurs de fer, et Secchi attribua cette raie commune à la chromosphère et à la couronne, à un gaz inconnu qui serait absorbé par le fer et observé dans le spectre de celui-ci, « de la même manière que l'hydrogène est absorbé et retenu par le palladium ». — Ce n'est qu'en 1899 que la mesure précise des longueurs d'onde fit voir à Fowler que la raie coronale et la raie chromosphérique du fer n'étaient pas identiques : leurs longueurs d'onde sont respectivement 0,5303 et 0,5317 μ ; — l'existence du coronium devenait indépendante du fer et de l'hypothèse assez audacieuse de Secchi. — Une confusion du même genre a lié pendant longtemps l'étude spectroscopique de la couronne et celle de l'aurore boréale : les raies discutées de la couronne sont extrêmement voisines des raies de l'aurore boréale attribuées parfois à un élément hypothétique nouveau, le géocoronium, et dont l'origine est restée mystérieuse jusque tout récemment [H. Babcock, *A study of the green auroral line by the interference method*, Aph. J., t. 57 (1923, 1), p. 209]. — L. Vegard (Christiania) vient de découvrir cette origine : *Sur le spectre de l'aurore boréale et les couches supérieures de l'atmosphère*, C.R., t. 176 (1923, 1), p. 947 ; *Sur la constitution des couches supérieures de l'atmosphère*, Ibid., p. 1488 ; *Émission de*

gine était inconnue, observées dans le spectre solaire et dans les spectres stellaires les mieux étudiés. Cette liste s'est, depuis, appauvrie par diverses identifications, et enrichie de lignes nouvelles actuellement non identifiées ; mise à jour, elle vient d'être publiée par F. Baxandall (Cambridge) (1) : elle passe en revue le spectre de la photosphère, le spectre de la chromosphère, celui de la couronne, ceux des nébuleuses, et de quelques étoiles caractéristiques (2). On y trouve respectivement, en ce qui concerne le Soleil :

Spectre de la photosphère	11 raies
Spectre de la chromosphère	11 raies
Spectre de la couronne	9 raies

Parmi les raies de la couronne se trouve, en 0,52037 μ, la raie attribuée au coronium. — Depuis 1910, ont été iden-

lumière par l'azote solide et émission du spectre auroral, Ibid., t. 178 (1924, 1), p. 1153 ; *Communication of low temperature investigations in the service of cosmical Physics*, dans les PUBLICATIONS OF THE 4th INTERN. CONGRESS OF REFRIGERATION, Londres, 1924. — Le spectre caractéristique de l'aurore boréale est reconstitué dans le bombardement de l'azote solide par les rayons cathodiques, et les régions supérieures de l'atmosphère (au-dessus de 90 km) sont principalement constituées de particules d'azote chargées électriquement. — De même on peut penser que les raies spectrales dont l'origine est inconnue, et en particulier le nébulium, sont dues, non à des corps qu'il resterait à découvrir, mais à des corps dans un état physique non encore expérimenté : la fin d'une communication de L. Vegard semble escompter de nouveaux succès dans cette voie. — Pendant l'impression de cet article, on apprend que la théorie de Vegard aurait été renversée au Congrès du froid de Londres (juillet 1924) par un physicien canadien, Mac Lennan ; celui-ci aurait étudié le spectre de l'azote solide au moyen d'un spectroscope plus dispersif, et aurait vu la raie de Vegard se décomposer en trois raies dont aucune n'a exactement la longueur d'onde de la raie de l'aurore polaire. — Dernières nouvelles : une réfutation de Vegard aura paru dans les C. R. de cette semaine (début juillet 1924) ; ce n'est pas un triplet mais une bande à trois maxima d'intensité dont la largeur diminue avec la teneur en azote (par rapport à l'argon) ; pour des cristaux d'azote extrêmement petits (état quasi-gazeux), la bande de Mac Lennan tend vers la raie de l'aurore polaire.

(1) F. E. Baxandall, *Lines of unknown origin in various celestial spectra*, M.N., t. 83 (1122-1923), p. 166.

(2) Ces étoiles sont : une étoile Wolf-Rayet, la nova Persée, la nova 2 Gémeaux, la nova 3 Aigle, η Carène, Mira Ceti, α Chiens de

tifiées : quatre raies de la photosphère (trois du magnésium et une du titane) ; quatre raies de la chromosphère (deux du chrome, une du magnésium, une du manganèse) ; aucune de la couronne (1).

Température. — Dans l'évaluation de la température des sources rayonnantes inaccessibles, on applique généralement l'une ou l'autre de deux méthodes, l'une actinométrique, l'autre spectroscopique. — La méthode actinométrique mesure la *constante solaire* (2), la corrige de l'absorption

Chasse, α Cygne, ε Grande Ourse, α Andromède, θ Cocher, ε Orion et une étoile dont le spectre a été étudié par Pickering. — La colonne Nébuleuses signale 17 raies ; depuis 1910, deux raies de nébuleuses, dues à l'hélium, ont été identifiées. — Le spectre des nébuleuses est d'une grande simplicité : il se réduit principalement aux quatre lignes 0.50071, 0.49590, 0.48615, 0.43407, μ. Les deux dernières sont dues à l'hydrogène ; les deux autres se trouvent dans le tableau de Baxandall ; la première au moins de ces deux lignes, généralement très forte, est attribuée à l'élément hypothétique qui a reçu le nom de nébulium, et auquel on attribue aussi une très forte raie ultra-violette de la nébuleuse d'Orion ; les nébuleuses (celle d'Orion en particulier) font souvent apparaître des raies de l'hélium ; on a cru reconnaître la raie du coronium.

(1) A propos de la *couronne solaire*, on peut signaler ici : B. Fessenkoff (Moscou), *Détermination de la limite supérieure de sa densité*, A.N., t. 219 (1923), n° 5238. L'éclat total de la couronne est d'un ordre voisin de celui de la pleine Lune (60 % en 1893, 110 % en 1898, 17 % en 1906). L'intensité diminue avec la distance au bord d'une façon très irrégulière, et dépend, d'une manière variable, de la latitude héliographique : en 1905, Fabry a trouvé 25 % de l'éclat au bord pour 15 % de prolongement du rayon solaire ; à la distance double du bord, l'éclat est réduit à 1 %. Suivant que l'on adopte pour cette décroissance telle ou telle loi, la densité de la couronne solaire est respectivement 2000 ou 20000 fois moindre que la densité de l'atmosphère terrestre à 100 km. d'altitude ; et, encore, toutes les hypothèses simplificatrices tendent-elles à accroître la densité obtenue.

(2) Sur la *constante solaire* et ses évaluations récentes, voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1922, R.Q.S., 4me série, t. 4 (1923, 2), p. 189 (p. 7 du tiré-à-part). — Une corrélation a été remarquée entre les variations de la constante solaire et les variations des éléments météorologiques terrestres (température, pluie) ; cette corrélation a été attribuée aux radiations solaires de courte longueur d'onde (ultra-violettes) qui enrichiraient en ozone les couches

atmosphérique, en déduit l'énergie totale rayonnée par la source dans l'unité de temps, et, par suite (moyennant l'hypothèse du *corps noir*), la température (absolue) demandée, proportionnelle, avec un coefficient connu, à la racine quatrième de l'énergie totale. — La méthode spectroscopique détermine la longueur d'onde de la radiation à laquelle correspond le maximum d'énergie rayonnée : la température (absolue) demandée est, suivant un coefficient connu, en raison inverse de cette longueur d'onde (1).

supérieures de l'atmosphère ; G. Dobson a comparé la radiation ultra-violette du Soleil et la teneur de l'air en ozone : *Measurements of the Sun's ultra-violet radiation and its absorption in the Earth's atmosphere*, PR. R. S., t. 104 (1923), p. 252 ; la variation de la radiation ultra-violette, de jour en jour, s'élève aux 30 % de sa valeur moyenne, et ne semble pas liée à la variation de la soi-disant constante solaire.

(1) Pour la méthode spectroscopique, voir, en particulier, le livre récent de J. Bosler, *L'évolution des étoiles*, Paris, 1923. — Cette chronique a signalé l'an dernier les travaux de M. N. Saha, sur l'*ionisation des atmosphères stellaires* : R.Q.S., 4me série, t. 4 (1923, 2), p. 205 (p. 23 du tiré-à-part); cette théorie établit une relation entre la pression et la température, par l'intermédiaire du degré d'ionisation du gaz considéré, et du potentiel d'ionisation propre à celui-ci ; or, le potentiel d'ionisation est connu par les travaux de laboratoire, le degré d'ionisation et la pression peuvent se déduire de l'étude du spectre, de sorte que, en principe, la température peut être calculée ; la température ainsi conclue sera celle de la couche renversante, qui peut différer extrêmement de la température de la photosphère. Sur ces distinctions et ces difficultés : P. Salet (Paris), *Qu'est-ce que la température d'une étoile ?* REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES, t. 35 (1923), p. 101. — Les applications astronomiques de la théorie de Saha ont fait l'objet d'une étude extrêmement intéressante de R. Fowler et F. Milne (Cambridge) : *The intensities of absorption lines in stellar spectra, and the temperatures and pressures in the reversing layers of stars*, M. N., t. 83 (1922-1923), p. 403. Cette étude, qui est accompagnée d'une importante bibliographie de la question, signale les difficultés des applications astronomiques de la méthode de Saha et insiste sur les hypothèses hasardeuses qui ont été introduites jusqu'aujourd'hui dans ces applications ; elle fait la discussion de ces hypothèses et les modifie de manière à serrer la réalité d'aussi près que possible. — Le cas particulier de la couche renversante du Soleil fournit une pression de seulement 1/10.000 d'atmosphère. C'est vers des résultats de plus en plus faibles que convergent les déterminations récentes de la pression à la surface du Soleil (voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, 4me

Dans un mémoire important, R. Lundblad (Lulea, Suède) (1), vient d'étudier le rayonnement, la température et les propriétés optiques des couches photosphériques du Soleil, en exprimant le rayonnement acquis et dépensé par un élément en équilibre thermodynamique d'une couche quelconque et en introduisant la température par la relation de Planck entre la température absolue et le pouvoir émissif d'un corps noir.

Le Soleil est considéré comme une sphère constituée de couches concentriques de matière rayonnante, absorbante et dispersante. Toutes choses égales, le rayonnement est d'autant plus intense que la longueur d'onde est moindre ; il est naturellement, pour toute longueur d'onde, plus intense vers l'extérieur de l'astre que vers l'intérieur, mais cette dissymétrie s'atténue lorsque la longueur d'onde augmente. Les résultats théoriques sont mis en nombre d'après les recherches de la *Smithsonian Institution* (Mount Wilson) (2). La température de la couche photosphérique la plus extérieure est calculée pour des longueurs d'onde allant de 0,323 μ (ultra-violet) à 2,097 μ (infra-rouge) ; elle passe, dans cet intervalle, de 4360 à 4580°, avec un maximum de 5040° pour une longueur d'onde 0,534 μ (jaune vert), ce qui donne une température moyenne de 4770° à la surface du Soleil. La température augmente avec la profondeur suivant une loi qui concentre de plus en plus les températures élevées vers les longueurs d'onde voisines

série, t. 2., 1922, 2, p. 196 (p. 29 du tiré-à-part). Les premières mesures (1896) de la pression solaire par le déplacement des raies spectrales ont fait conclure à une pression de 2 à 7 atmosphères ; en 1909, Fabry et Buisson (Paris) déduisaient encore des raies du fer une pression de 5 à 6 atmosphères ; en 1921, dans la recherche du déplacement prédit par la Relativité, les mêmes physiciens reprenaient leurs travaux, et trouvaient, ainsi que Perot et P. Salet, des pressions extrêmement faibles ; ces derniers résultats sont parfaitement compatibles avec ceux de Fowler et Milne.

(1) *On the radiation and temperature of the external photospheric layers*, APH. J., t. 58 (1923, 2), p. 113.

(2) ANNALS OF THE ASTROPHYSICAL OBSERVATORY OF THE SMITHSONIAN INSTITUTION, Washington, t. 3 (1913); voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1922, R.Q.S., 4me série, t. 4 (1923, 2), p. 190 (p. 8 du tiré-à-part).

de 0,5 μ (1), de sorte qu'une fraction considérable des radiations vert-bleues vient des couches profondes et chaudes, tandis que les radiations ultra-violettes et une partie des radiations infra-rouges prennent naissance dans les couches voisines de la surface (2).

SYSTÈME PLANÉTAIRE

Planètes transneptuniennes. — La découverte de Neptune est racontée dans tous les manuels d'Astronomie. La planète Uranus, découverte par Herschel en 1781, avait été observée plusieurs fois, depuis un siècle, par des astronomes qui l'avaient prise pour une étoile faible. Ces observations anciennes ne cadraient pas avec les tables du mouvement de la planète dressées par Bouvard d'après la théorie de Laplace : Bouvard attribua ces discordances à l'influence

(1) La variation de la température avec la profondeur n'est pas calculée explicitement ; on trouverait cependant dans l'article de Lundblad les éléments nécessaires à ce calcul. Rapprocher de : R. Dietzius (Vienne), *Die Berechnung des vertikalen Temperaturgefaelles in der aeusserer Gashülle der Sonne*, A.N., t. 218 (1923), n° 5312; pour l'hydrogène ionisé, l'accroissement de température serait de 4° par km. L'auteur fait ressortir les raisons pour lesquelles, d'après lui, la température de la chromosphère est assez basse : la présence des bandes du cyanogène dans le spectre-éclair, bandes qui se retrouvent dans le spectre des étoiles dont on sait que la température est peu élevée (ainsi que dans celui des taches solaires), la présence de lignes de calcium non ionisé aussi bien que de calcium ionisé ; — quant aux protubérances, ce ne peuvent être des masses gazeuses projetées vers les couches supérieures de l'atmosphère, car un courant ascendant ne pourrait donner que des masses gazeuses trop refroidies pour être brillantes ; les protubérances naîtraient plutôt dans un courant descendant, comparable à un anticyclone terrestre ; lorsqu'une protubérance s'élève, c'est que l'illumination de la masse gazeuse s'étend de proche en proche à partir des couches inférieures où règnent les températures élevées.

(2) Cette conclusion s'accorde avec celle que justifie la méthode spectroscopique appliquée aux bandes du cyanogène : R. Birge, *The quantum theory of band spectra and its application to the determination of temperature*, Aph. J., t. 55 (1922, 1), p. 273.

d'une planète inconnue. Indépendamment l'un de l'autre, Adams en Angleterre et Leverrier en France, entreprirent, d'après les perturbations observées, le calcul de la détermination des éléments de la planète perturbatrice. La résolution de ce difficile problème exige que l'on se donne, a priori, la distance moyenne de la planète au Soleil : Adams adopta 39 fois le rayon moyen de l'orbite terrestre, Leverrier environ 36 fois ce rayon ; le premier termina ses calculs, sans les publier, en 1845 ; le second en 1846, et les publia immédiatement. Leurs résultats sont très divergents et diffèrent beaucoup de la réalité ; par exemple :

	Adams	*Leverrier*	*Orbite vraie*
Demi-grand axe	39	36,154	30,11
Excentricité	0,161	0,108	0,009
Durée de révolution		217,4 ans	164,6 ans

Cependant, la planète fut trouvée à moins d'un degré de différence en longitude céleste du point voisin de l'écliptique indiqué par Leverrier : c'est que l'hypothèse initiale et nécessairement gratuite sur la distance moyenne de la planète au Soleil ne devait guère avoir d'influence sur sa position en longitude céleste vers l'époque de sa plus grande action sur la marche d'Uranus (1).

Mais la planète Neptune ne suffit pas à expliquer toutes

(1) La découverte de Neptune est racontée d'une manière qui semble bien objective dans le *Cours d'Astronomie* de H. Faye (1883), t. 2, p. 200. C'est de cet ouvrage que sont tirés les renseignements numériques reproduits ici. — Il est amusant de voir comment, dans son *Astronomie théorique et pratique* (éd. de 1921), H. Bouasse, qui déteste Leverrier, expose la découverte du célèbre astronome : (p. 372) « ... il fallait pour résoudre ce problème un calculateur aussi merveilleux que Leverrier. Mais quand on nous parle de hardiesse, de pénétration admirable, etc., on se moque de nous... Il s'agissait de tâtonner intelligemment : c'est ce que fit Leverrier. Tout de même résoudre un système d'équations à 8 inconnues, ce n'est pas écrire la *Philosophie naturelle* de Newton. Ayons le sens des hiérarchies, et ne soyons pas idiots, même dans nos admirations ! » Et le morceau continue aux dépens du « terrible despote de l'Observatoire ».

les perturbations d'Uranus ; de plus, Neptune lui-même subit des perturbations inexpliquées ; enfin, les comètes périodiques réapparaissent à leur périhélie avec des avances ou des retards que les masses et les positions des planètes connues sont insuffisantes à justifier. D'où la question : quels sont les éléments de la planète inconnue, ou des planètes inconnues, plus éloignées du Soleil que Neptune, auxquelles pourraient être attribuées toutes ces anomalies ?

En 1877, D. Todd déduisit des perturbations d'Uranus la position d'une planète inconnue dans l'hypothèse d'un demi-grand axe égal à 52 fois celui de l'orbite terrestre (1). En 1880-1887, Forbes mit en œuvre les anomalies des mouvements cométaires (2). — En 1899, H. Lau admit l'existence de deux planètes transneptuniennes à des distances moyennes du Soleil de 46,5 et 71,8 demi-grands axes de l'orbite terrestre, avec des masses valant 9 fois et 48 fois la masse de la Terre (3). En 1904, See supposa trois planètes inconnues, à des distances héliocentriques moyennes 42, 56 et 72 (4). — En 1909, W. Pickering appliqua une méthode graphique au calcul des éléments d'une planète dont la distance moyenne était 52, avec une masse égale à deux fois celle de la Terre (5). — Gaillot, en 1909, calcula les éléments de deux planètes transneptuniennes, moyennant des distances 44 et 66, et leur trouva des masses valant 5 et 24 fois la masse de la Terre (6). — En 1915, ce fut Lowell qui présenta deux solu-

(1) AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE, t. 20 (1880), p. 225 : *Preliminary account of a speculative and practical research for a transneptunian planet.*

(2) M. N., t. 52 (1891-1892), p. 501.

(3) L'ASTRONOMIE, t. 28 (1914), p. 276, *La planète transneptunienne.*

(4) *Evolution of stellar systems*, t. 2, p. 375.

(5) ANNALS OF HARVARD COLLEGE OBSERVATORY, t. 61 (1900), p. 162, *The elements of the orbit of O... from the perturbations of Uranus.* Deux ans plus tard, le même auteur déduisit des anomalies cométaires trois nouvelles planètes extérieures dont les masses seraient très considérables : des quatre planètes transneptuniennes ainsi prévues, la plus massive aurait une masse qui atteindrait le 1/16 de celle du Soleil : celui-ci serait ainsi une véritable étoile double à compagnon obscur. (Ibid., p. 368, table 88, *Elements of the three assumed planets*).

(6) ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, t. 28 (1910), *Tables nouvelles des mouvements d'Uranus et de Neptune.*

tions : celle d'une planète de masse 8 à la distance moyenne 45, et celle d'une planète de masse 7 à la distance moyenne 43 (1).

Sauf Forbes, tous ces auteurs ont utilisé les perturbations d'Uranus. Pourquoi n'ont-ils pas utilisé plutôt les perturbations, sûrement plus sensibles, de Neptune ? C'est que, depuis sa découverte, Neptune n'a guère encore parcouru un arc dont l'étendue suffise à la connaissance de ces perturbations. — W. Pickering a jugé récemment cette connaissance suffisante et a repris, pour ces données nouvelles, sa méthode graphique de jadis (2). La première planète transneptunienne aurait une distance héliocentrique moyenne de 55,1 rayons moyens de l'orbite terrestre, une orbite dont l'excentricité serait aussi considérable que 0,31, une durée de révolution de 409 ans et une masse qui vaudrait deux fois celle de la Terre.

Les relations dynamiques de Neptune et de la planète nouvelle seraient fort voisines de celles de la Terre et d'Éros, la planète qui se rapproche le plus de la Terre (3).

Quant à l'éclat de la planète et à la possibilité de l'apercevoir, on ne peut faire que des hypothèses : d'après les hypothèses les plus plausibles, la planète serait, de la Terre, comparable à une étoile de quinzième grandeur.

Planètes intramercurielles. — On sait aussi comment les perturbations inexpliquées de Mercure ont provoqué la recherche d'une planète dont l'orbite serait intérieure à celle de Mercure ; il s'agit en particulier du déplacement du périhélie de l'orbite troublée, déplacement dont l'influence de l'ensemble des planètes ne fait retrouver que 550″ par siècle tandis que l'observation constate une rotation séculaire de 590″ ; on sait aussi que la Mécanique relativiste

(1) MEMOIRS OF THE LOWELL OBSERVATORY, t. 1, n° 1 (1903).

(2) *The transneptunian planet*, ANNALS OF HARVARD..., t. 82, n° 3 (p. 49), 1919.

(3) Il en serait ainsi, en particulier, en ce qui concerne la commensurabilité des moyens mouvements, qui jouent un si grand rôle dans l'efficacité perturbatrice des influences mutuelles. Les mêmes relations dynamiques se retrouvent entre Titan et Hypérion, sixième et huitième satellites de Saturne.

prétend donner l'explication complète de ce déplacement et attache grande importance à cet accord entre la théorie et l'observation, là où la Mécanique newtonienne s'est montrée insuffisante.

La Mécanique newtonienne, cependant, peut toujours être considérée comme satisfaisante, par l'hypothèse d'une ou de plusieurs planètes, telles que des planètes intramercurielles, qui auraient échappé jusqu'ici à l'observation (1). L'insuccès des recherches les plus patientes semblait avoir découragé les astronomes de persister dans cette voie. Des travaux récents de W. Smart et R. Trumpler viennent de rendre quelque intérêt à cette question (2). La recherche analytique des éléments d'une planète décelée par les perturbations d'une autre planète est rendue extrêmement incertaine par l'hypothèse qu'il est nécessaire d'introduire au début des calculs, soit (par exemple) sur la distance héliocentrique moyenne, soit sur l'excentricité : ceci vient d'être expliqué à propos des planètes transneptuniennes. Une configuration remarquable d'autres membres du système planétaire suggère une hypothèse que n'avaient pas envisagée Leverrier et ses collaborateurs. Il s'agit d'un groupe de petites planètes désignées sous le nom de planètes troyennes, nom qu'elles doivent à celui de Trojan, la plus importante d'entre elles : ce sont les six ou sept planètes télescopiques dont les distances moyennes héliocentriques sont extrêmement voisines du demi-grand axe de l'orbite de Jupiter ; leurs moyens mouvements sont naturellement voisins, dans la même mesure, de celui de Jupiter, et la manière dont elles décrivent leurs trajectoires les obligent à demeurer dans le voisinage de l'un ou l'autre des points d'équilibre que sont les troisièmes sommets de deux triangles équilatéraux ayant pour côté la droite Soleil-Jupiter et situés dans un plan peu incliné sur le plan de l'écliptique (3).

(1) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1922, R.Q.S., 4me série, t. 4 (1923, 2), p. 226 (p. 24 du tiré-à-part).

(2) W. Smart, *On the motion of the perihélion of Mercury*, M.N., t. 82 (1921-1922), p. 12. — R. Trumpler, *Search of small planets at the triangle points of Mercury and the Sun*, PAC. A. S., t. 35 (1923), p. 313.

(3) Mémoire récent : E. Brown, *The theory of the Trojan group of asteroids*, ch. I, dans les TRANSACTIONS OF THE ASTRONOMICAL

Par analogie, W. Smart, dans ses calculs, part de cette hypothèse que la planète inconnue, cause du déplacement inexpliqué du périhélie de Mercure, se trouverait au troisième sommet de l'un des deux triangles équilatéraux ayant pour côté la droite Soleil-Mercure. Sa masse devrait valoir le septième de la masse de Mercure, et son éclat serait (par des hypothèses plausibles) comparable à celui d'une étoile de première grandeur. Cette planète donnerait au périhélie de Vénus un déplacement séculaire inappréciable, et serait pratiquement sans influence sur les autres orbites planétaires. — La recherche instrumentale a été entreprise par R. Trumpler à l'Observatoire de Mount-Hamilton. Rien n'a été trouvé ; cependant les observations effectuées auraient permis de découvrir un astre de la huitième grandeur dans l'une des régions explorées, un astre de la onzième grandeur dans l'autre ; à ces grandeurs auraient correspondu respectivement (d'après les mêmes hypothèses plausibles) des planètes de 39 milles et de 14 milles de diamètre. — Cette nouvelle exploration du voisinage de Mercure s'est décidément montrée aussi stérile que les précédentes.

Température des planètes. — L'énergie que nos photomètres reçoivent des planètes se compose de la radiation solaire réfléchie (de petites longueurs d'onde) et de la radiation obscure (de grandes longueurs d'onde) de la surface planétaire elle-même ; la première traverse presque totalement une couche d'eau limitée par des lames de quartz (water-cell) (1), tandis que la dernière y est complètement arrêtée. La mesure de ces radiations, ainsi dissociées, permet, moyennant des hypothèses vraisemblables, la détermination de la température superficielle de la planète : c'est ce que fait un travail récent de D. Menzel (Princeton) (2) qui met en œuvre les observations radiométriques effec-

OBSERVATORY OF YALE UNIVERSITY, t. 3, 1re partie ; analysé par W. Greaves dans OBS., t. 46 (1923), p. 336.

(1) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1922, R.Q.S., 4me série, t. 4 (1923, 2), p. 200 (p. 18 du tiré-à-part).

(2) D. H. Menzel, *Water-Cell transmission and planetary temperatures*, APH. J., t. 58 (1923, 2), p. 65.

tuées aux observatoires Lick et Lowell. La température de Vénus est estimée ainsi à 50°, celle de Mars à —16° ; Jupiter et Saturne fournissent le même nombre de — 110°, tandis que la surface lunaire aurait une température de 120°. Ce sont des températures moyennes pour l'ensemble de l'astre. Mars est probablement très peu protégé par son atmosphère, de façon que le rayonnement nocturne y soit considérable. Jupiter et Saturne sont trop éloignés du Soleil pour que le rayonnement de celui-ci puisse y entretenir une température moyenne de — 110° ; il faut admettre une coopération sensible de la chaleur interne de la planète.

Pouvoir réfléchissant des planètes et de la Terre. — Les déterminations de températures planétaires qui viennent d'être signalées se sont faites moyennant une constante solaire de 1,932 cal. De plus, on a dû y introduire, comme données, les valeurs numériques des albedos (ou pouvoirs réfléchissants) planétaires. Les nombres adoptés sont ceux proposés par Russell en 1916. Il y a lieu de les signaler ici (1).

Dans un premier mémoire, Russell s'est occupé de la *grandeur* (grandeur stellaire ou magnitude) du Soleil, des planètes et de la Lune. On sait que la grandeur d'une source lumineuse céleste est un nombre par lequel on cherche à caractériser l'impression de cette source sur l'œil : on parle d'étoiles de la première, de la deuxième grandeur,... et les étoiles encore tout juste visibles à l'œil nu sont de la sixième grandeur. Cette notion qui remonte à l'antiquité (Hipparque et Ptolémée) a été précisée, et la grandeur est aujourd'hui une fonction (logarithmique) de l'éclat apparent que mesure le photomètre, choisie de façon à respecter autant que possible les classifications anciennes (2) ; en particulier, α Grande Ourse a une grandeur 2,0, et, de deux étoiles ayant des grandeurs entières consécutives, l'éclat

(1) H.N. Russell, dans Aph. J., t. 43 (1916, 1) : *The stellar magnitudes of the Sun, Moon and planets*, p. 103, et *On the albedo of the planets and their satellites*, p. 173.

(2) Pour le passage de la notion ancienne à la notion d'aujourd'hui, voir, par exemple, C. André, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. 1 (1899), p. 110.

apparent de la plus brillante est mesuré par un nombre 2,5 fois plus grand que celui qui mesure l'éclat apparent de l'autre (1).

Le premier mémoire de Russell fixe à — 26,72 la grandeur du Soleil, ce qui signifie que l'éclat (apparent) du Soleil vaut celui d'une étoile de première grandeur un nombre de fois exprimé par 10 élevé à la puissance $\frac{26{,}72 + 1}{2{,}5}$, à savoir environ cent milliards de fois (2) : $\epsilon = 10^{11}$.

Quant aux planètes, il faut distinguer celles qui présentent une *phase* sensible : Mercure, Vénus, Mars. Leur grandeur dépend de la configuration Soleil-Terre-planète, et passe par un maximum et un minimum. Pour des moyennes distances de la planète et de la Terre au Soleil, ces minima sont :

Mercure	gr. = — 1,04	$\epsilon = 10^{0{,}816}$	= 6,5
Vénus	— 4,71	$10^{2{,}284}$	= 192,4
Mars	— 1,79	$10^{1{,}116}$	= 13,1

(1) Le mot *éclat* (apparent) employé ici l'est dans le sens habituel aux astronomes ; ce n'est pas l'éclat dans le sens des physiciens. — La notion d'éclat, au sens des astronomes, s'exprime par un nombre qui varie avec la distance de la source lumineuse : c'est donc en réalité l'*éclairement* d'une surface de telle aire sous la lumière émanée de la source considérée ; aussi se mesure-t-il en *bougies-mètres*. L'éclat des physiciens, au contraire, se définit uniquement par la source lumineuse : c'est l'intensité par unité de surface rayonnante, et elle se mesure en bougies par centimètre carré.

(2) Si E_0 est l'éclat d'une étoile de première grandeur, et E l'éclat d'un astre dont la grandeur est m, la relation entre m et E est la suivante :

$$m = 1 - 2{,}5 \log \frac{E}{E_0}$$

ou

$$E = E_0 \cdot 10^{\frac{1-m}{2{,}5}},$$

de sorte que, ici,

$$E = E_0 \cdot 10^{\frac{26{,}72+1}{2{,}5}}.$$

D'après une mesure ancienne de Fabry, l'éclat du Soleil au zénith était environ de 100000 bougies-mètres ; Russell remplace ce nombre par 134500.

Pour les autres planètes :

Jupiter	gr. = — 2,29	$\epsilon = 10^{1,316}$	= 20,7
Saturne	0,89	$10^{0,044}$	= 1,1
Uranus	5,74	$10^{-1,096}$	= 0,8
Neptune	7,65	$10^{-2,660}$	= 0,05 (1)

Enfin, la grandeur de la pleine Lune est — 12,85, à quoi correspond un rapport ϵ de son éclat à celui d'une étoile de la première grandeur égal à environ 350 000.

Le second mémoire de Russell concerne l'*albedo* des astres du système planétaire : pour un élément de surface réfléchissant la lumière d'une manière diffuse, l'albedo de cet élément de surface est le rapport de la quantité de lumière réfléchie à la quantité de lumière reçue par cet élément : sur une sphère, l'albedo est le même en tous les points de son disque apparent (2). Les observations photométriques

(1) Les mêmes recherches ont porté sur les quatre principales petites planètes :

Cérès	gr. = 7,15	E = $10^{-2,460}$	= 0.0035
Pallas	7,84	$10^{-2,736}$	= 0.0018
Junon	8,95	$10^{-3,180}$	= 0.0007
Vesta	6,04	$10^{-2,016}$	= 0.0096 ;

sur les quatre principaux satellites de Jupiter :

Io	gr. = 5.54	E = $10^{-1,776}$	= 0.0167
Europe	5,69	$10^{-1,876}$	= 0.0133
Ganymède	5,08	$10^{-1,632}$	= 0.0233
Callisto	6,26	$10^{-2,104}$	= 0.0079 ;

et sur les plus gros des satellites de Saturne :

Titan	gr. = 8,30	E = $10^{-2,920}$	= 0.0012

(2) Cette dernière proposition n'est exacte que pour autant que soit vraie la loi dite de Lambert qui exprime la manière dont la lumière est réfléchie, en réflexion diffuse, sur une surface. C'est dans la mesure où la loi de Lambert est vraie que la Lune peut être considérée comme un disque dont l'intensité lumineuse est uniforme : l'exemple du Soleil ne pourrait pas être choisi, car, sur le Soleil, il y a absorption dans une atmosphère plus épaisse à traverser par les rayons émanés du bord du disque. — La photométrie astronomique se fait aussi suivant une autre loi de réflexion diffuse, dite de Seeliger.

mises en œuvre par Russell le font conclure à des albedos beaucoup moindres que ceux qui avaient été admis jusqu'à cette époque :

Mercure	0,069	Saturne	0,63
Vénus	0,59	Uranus	0,63
Mars	0,154	Neptune	0,73
Jupiter	0,56	Lune	0,073 (1)

La notion d'albedo s'applique aussi à la Terre. Jusqu'il y a peu de temps on n'en avait fait que des mesures indirectes, d'après la lumière cendrée de la Lune, réflexion sur cet astre de la lumière déjà réfléchie que lui envoie la Terre, et en tenant compte de l'albedo lunaire : Russell, dans le mémoire analysé ci-dessus, lui attribue la valeur 0,45.

Depuis lors, des observations directes de la lumière diffusée par la surface terrestre ont été faites en aéroplane (2) ; d'autre part, une théorie de la couleur de la mer a été mise sur pied, dans laquelle cette couleur est attribuée à la dispersion moléculaire de la lumière en eau profonde (3). Ces observations et cette théorie viennent d'être appliquées à une détermination nouvelle de l'albedo terrestre (4) : résultat, 0,46.

Connaissance de l'atmosphère terrestre par l'observation des étoiles filantes. — La densité de l'atmosphère

(1) Il s'agit de l'albedo *visuel*, dont la définition s'applique en ne tenant compte que des radiations visibles ; il est différent de l'albedo *photographique :* celui-ci se mesure au moyen des radiations qui impressionnent la plaque photographique. — Albedo visuel de quelques petites planètes et des principaux satellites :

Cérès	0,06	Europe	0,76
Pallas	0.07	Ganymède	0,45
Junon	0.12	Callisto	0,16
Vesta	0.26	Titan	0,50
Io	0,69		

(2) Luckiesh (Cleveland), *Aerial photometry*, APH. J., t. 49 (1919, 1), p. 108.

(3) C. Raman (Calcutta), *On the molecular scattering of light in water and the colour of the sea*, PR. R. S., t. 101 (1922), p. 64.

(4) K. Ramanathan (Rangoon), *On the visual and photographic albedo*, APH. J., t. 57 (1923, 1), p. 177.

terrestre est généralement calculée dans l'hypothèse d'une température décroissant à raison de 6°,5 par km jusque 20 km, et, au delà, d'une température constante d'environ —50° : à 100 km de hauteur, la densité atmosphérique serait d'une tonne par km^3 ; elle serait d'un kg par km^3 à une altitude de 200 km (1). — Cette hypothèse et ces résultats doivent être modifiés depuis une étude récente dans laquelle les caractères physiques de l'atmosphère se déduisent de l'observation des étoiles filantes (2). Le météore-type ou météore moyen est celui qui apparaît à une hauteur de 100 km, disparaît à une hauteur de 80 km ; sa vitesse est de 40 km/sec et son éclat serait, à une distance de 150 km, l'éclat apparent d'une étoile de première grandeur. Le passage du météore dans l'air atmosphérique provoque l'évaporation progressive de ses couches superficielles, et la vapeur produite devient incandescente : la disparition correspond à l'instant où l'évaporation est complète. Pour le mé éore-type et une température ambiante de —50°, la calotte gazeuse incandescente est à une température de 3150° ; la masse est de 6,25 milligr, à quoi correspondrait, pour une sphère de fer, un diamètre de 1,15 mm. (Dans un bolide, les dimensions sont assez grandes pour qu'il y ait liquéfaction avant évaporation, et chaque gouttelette formée se comporte comme un météore comparable au météore-type, — d'où la traînée lumineuse que l'on aperçoit). — D'après l'observation des étoiles filantes, la densité atmosphérique, à partir d'une cinquantaine de kilomètres, décroît

(1) Ceci est, vis-à-vis de la réalité, extrêmement simplifié. Des travaux récents, indépendants de celui qui va être signalé, ont fait faire de grands progrès à la connaissance de l'atmosphère. En particulier : R. Soreau, *Lois expérimentales des variations de la pression barométrique et du poids spécifique de l'air avec l'altitude*, C. R., t. 169 (1919, 2), p. 1023, et *Lois de variation des caractéristiques de l'air standard avec l'altitude*, Ibid., t. 175 (1922, 2), p. 568 et 1041, t. 176 (1923, 1), p. 290 ; A. Rateau, *Pression et poids spécifique de l'air en atmosphère normale*, Ibid., t. 174 (1922, 1), p. 1598, et t. 175 (1922, 2), p. 1179.

(2) F. Lindemann et G. Dobson (Oxford), *A theory of meteors, and the density and temperature of the outer atmosphere to which it leads*, Pr. R. S., t. 102 (1923), p. 411.

beaucoup moins rapidement que le veut le calcul habituel : de 150 à 200 km, elle serait encore voisine d'une tonne par km^3 (1).

Edward Emerson Barnard (1857-1923). — Les satellites connus de Jupiter sont actuellement au nombre de neuf. Les quatre gros satellites furent découverts par Galilée en 1610. Le monde de Jupiter fut étudié pendant trois siècles sans que rien fît soupçonner l'existence de membres plus nombreux. Le premier des petits satellites fut découvert par Barnard en 1892 à l'observatoire Lick, Mount Hamilton. Son orbite est intérieure à l'orbite du gros satellite le plus proche de la planète. Cette découverte fit sensation et provoqua de nouvelles études visuelles et photographiques ; aussi connaît-on aujourd'hui quatre nouveaux petits satellites, dont les orbites sont extérieures à l'orbite du gros satellite le plus éloigné de la planète : les satellites VI, VII et IX découverts à Mount Hamilton, les deux premiers par C. Perrine, le troisième par S. Nicholson, — et le satellite VIII découvert à Greenwich par P. Melotte.

L'astronome américain E. E. Barnard est né à Nashville dans le Tennessee, en 1857. Son père mourut avant sa naissance, et son enfance connut la pauvreté. Il ne fréquenta l'école que pendant quelques mois, et dès l'âge de neuf ans prit du service chez un photographe : il y demeura pendant 17 ans. Une circonstance fortuite lui mit entre les mains une petite lunette faite de lentilles hors d'usage et d'un tube de carton. Il se prit de passion pour l'étude du ciel, et, à force d'économie, en 1897, il parvint à acheter, moyennant son salaire d'une année presque entière, un petit équatorial de cinq pouces.

L'année suivante, l'American Association for Advancement of Science, tint une session à Nashville sous la présidence de S. Newcomb. Les amis de Barnard, forts de la réputation locale que valait à leur compagnon sa con-

(1) Rapprocher de B. Fessenkoff (Moscou), *Influence de la résistance de l'atmosphère sur les coordonnées des radiants*, A. N., t. 218 (1923), n° 5209, et *Sur la constitution de l'atmosphère, analyse photométrique du crépuscule*, A. N., t. 220 (1923-1924), n° 5259.

naissance des astres, le persuadèrent de se présenter au célèbre mécanicien céleste. Celui-ci fut peu encourageant : l'observation, sans plus, était temps perdu, et ce qu'il fallait avant tout, c'était la connaissance des mathématiques! — Barnard, sans instruction, se mit au travail, et ceci lui fut facilité par les fonctions qu'il assuma pendant quelques années au petit observatoire de l'Université de Nashville.

A peu près à la même époque que d'autres observateurs il avait découvert la lumière anti-zodiacale et la grande tache rouge de Jupiter. Il s'adonna à la recherche des comètes : il en découvrit bientôt plusieurs coup sur coup, ce qui, dans la situation peu fortunée où il se trouvait, était d'autant plus intéressant qu'un observatoire américain attribuait alors une prime de 200 dollars à chaque pareille découverte. Il constata la présence de tout un essaim de comètes dans le voisinage de la grande comète de 1882 : ceci, pour diverses raisons, resta presque ignoré.

En 1888, il entra à l'observatoire Lick, au Mount Hamilton, qui venait d'être édifié. Ce n'est qu'en 1892 qu'il put faire usage du grand réfracteur de 32 pouces : au cours de la onzième nuit d'observation, il aperçut un point brillant dans le voisinage du troisième satellite de Jupiter, si fugitif que son observation devenait impossible dès que pénétrait dans la lunette la moindre trace de la lumière de la planète, et sa position ne put être repérée que par rapport au troisième satellite : c'était le satellite insoupçonné, plus proche de Jupiter que le plus proche des satellites galiléens.

La carrière astronomique de Barnard, à l'observatoire Lick, puis, à partir de 1895, à l'observatoire Yerkes de l'Université de Chicago, a été extrêmement féconde : étude des comètes, des planètes, des amas, des nébuleuses, de la Voie lactée dont il entreprit le grand atlas photographique. — Les médailles d'or des prix Lalande, Arago, lui furent décernées par l'Académie des Sciences de Paris en 1892 et 1893 ; la Royal Astronomical Society lui attribua sa médaille d'or en 1897.

En 1881, Barnard avait épousé la fille de son patron, le photographe de Nashville. — Vers la fin de sa vie, Barnard eut comme assistant, à l'observatoire Yerkes, sa nièce Miss M. Calvert : celle-ci prépare actuellement la publica-

tion des travaux du célèbre astronome dont la bibliographie comporte 843 numéros (1).

PHYSIQUE STELLAIRE

Équilibre thermodynamique d'une étoile. — Le problème essentiel de la Physique stellaire est celui de l'équilibre thermodynamique d'une masse sphérique gazeuse à laquelle une étoile soit comparable ; sa solution devra conclure par une formule au moyen de laquelle pourra se calculer le rayonnement total de l'étoile, et par conséquent son intensité lumineuse. — Quelles sont les grandeurs dont la connaissance sera nécessaire à ce calcul ? Les étoiles diffèrent par la masse, la densité, le type spectral et la température ; de plus, le poids moléculaire moyen doit être supposé connu. Mais ces diverses quantités sont-elles indépendantes ? — D'autre part, on aperçoit que le problème de l'équilibre thermodynamique de l'étoile se décompose dans les deux problèmes suivants : 1) de quelle manière la température varie-t-elle du centre à la surface de l'étoile ? car c'est cette variation de température qui provoque le flux d'énergie rayonnante à travers la surface ; 2) quelle est la valeur du coefficient d'opacité ou coefficient d'absorption de cette énergie rayonnante ?

On sait la part importante qui revient à A. Eddington (Cambridge) dans la résolution de ces problèmes difficiles (2).

(1) Notices sur Barnard dans tous les journaux astronomiques de 1923. La plus développée est celle de l'APH. J., par E. Frost, t. 58 (1923, 2), p. 1 ; la plus intéressante, celle de l'OBS., t. 46 (1923), p. 158. Voir aussi AN. J., t. 35 (1923), p. 25.

(2) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1920, R.Q.S., 3me série, t. 30 (1921, 2), p. 263 (p. 18 du tiré-à-part). — A. Eddington a, depuis, publié une synthèse de ses travaux: *Das Strahlungsgleichgewicht*, ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK, t. 7 (1921), p. 351. — Travaux plus récents du même auteur : *On the absorption of radiation inside a star*, M.N., t. 83 (1922-1923), p. 32 et t. 84, p. 104 ; *Applications of the theory of the stellar absorption-coefficient*, Ibid., t. 83, p. 98 : on y trouve le calcul de l'éclat, de la température, de la densité

Aux températures élevées qui règnent dans les étoiles, la part prépondérante de l'énergie se trouve dans les ondes d'éther parcourant la masse dans tous les sens : l'équilibre cherché est un équilibre de radiation, et non de convection ; de plus, cette radiation oblige à tenir grand compte de la pression de l'énergie, pression de la lumière, qui agit en sens inverse de la gravitation et augmente la distance moyenne des particules matérielles dont l'ensemble constitue la masse de l'étoile.

La théorie d'Eddington suppose que la matière stellaire se comporte comme un gaz parfait ; dès lors, le rayonnement est le même que celui d'une sphère gazeuse dont le poids moléculaire moyen a telle valeur que l'on trouve voisine de 2 pour toute étoile ; en première approximation, le rayonnement ne varie d'une étoile à l'autre qu'avec la masse de l'étoile : la densité, la classe spectrale, la température n'interviennent que d'une manière actuellement négligeable. — Ainsi, l'intensité lumineuse de l'étoile peut s'exprimer par une fonction de la masse seule, et cette fonction est connue sauf une constante qui renfermera les parties mal connues des nombres utilisés et toutes les incertitudes de la théorie : cette constante se déterminera par le rapprochement de l'intensité lumineuse et de la masse d'une seule

d'étoiles naines et géantes de diverses masses ; le Soleil ne semble pas descendu beaucoup au-dessous de sa température maximum qui fut le plus probablement 6600°.

La théorie d'Eddington ne tient pas compte du mouvement de rotation de l'étoile, ni de l'application de forces extérieures. E. Milne vient d'y introduire la rotation de la masse stellaire : *The equilibrium of a rotating star*, M.N., t. 83 (1922-1923), p. 118 ; la considération des forces extérieures, génératrices de marées, est annoncée pour un mémoire ultérieur. Dans le cas particulier d'une rotation lente, l'introduction d'une « pression de rotation », qui s'associe à la pression de radiation et dont le rôle est analogue à celui de la force centrifuge, permet de comparer l'équilibre de la masse tournante à celui d'une étoile de même masse et au repos : l'intensité lumineuse de l'étoile tournante est moindre, ainsi que sa température efficace moyenne, tandis que plus grand est son rayon moyen ; de plus, la température efficace croît de l'équateur à l'un et à l'autre pôle.

étoile, par exemple de Capella, pour laquelle ces quantités sont bien connues (1).

Cette théorie, qui suppose la matière stellaire assimilable à un gaz parfait, est-elle vraiment applicable aux étoiles ? Aux étoiles géantes certainement, — et il y a lieu de rappeler la distinction entre les étoiles naines et les étoiles géantes ?(2)

Voici deux étoiles, dont les masses sont voisines, de même type spectral, et, par conséquent, de températures peu différentes. Leur observation spectroscopique permet le calcul de leurs densités ; l'une a, comme notre Soleil (1,36), une densité (moyenne) voisine de celle de l'eau, l'autre une densité 400 fois moindre : la première est une étoile naine, la deuxième une étoile géante ; et ces deux étoiles, en pareille correspondance, sont considérées comme représentatives de deux phases par lesquelles passerait toute étoile : la phase d'étoile géante lorsque sa température croît, alors

(1) Voici, par exemple, quelle serait la distribution des densités et des températures à l'intérieur d'une étoile géante dont la masse serait 1,5 fois celle du Soleil, la densité moyenne 0,002 gr. par cm^3, le rayon 7000000 km, et la température efficace (de rayonnement à la surface) 6500° :

dist. au centre	*densité*	*température*
0^{km}	0,108 5	6 590 000°
1 000 000	0,067 8	5 640 000
2 000 000	0,021 5	3 840 000
3 000 000	0,005 0	2 370 000
4 000 000	0,001 0	1 380 000
5 000 000	0,000 15	730 000
6 000 000	0,000 009	290 000

Comparer avec : A. Véronnet (Paris), *Équilibre adiabatique d'un astre gazeux*, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 692. — Les conclusions de Véronnet sont extrêmement opposées à celles d'Eddington : « Dans tous les cas d'équilibre possibles, les conditions physiques internes des étoiles ne peuvent pas s'éloigner beaucoup de celles qui sont manifestées à la surface ; on ne peut absolument pas y introduire des températures extraordinaires, qui ne seraient pas du même ordre que celles que nous connaissons ». — Voir aussi les objections de F. Lindemann (Oxford) : *Note on the absorption inside a star*, M. N., t. 83 (1922-1923), p. 332.

(2) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1922, R.Q.S., 4^{me} série, t. 4 (1923, 2), p. 207 (p. 25 du tiré-à-part).

que l'énergie libérée par le travail de la gravitation l'emporte sur la dépense d'énergie par rayonnement, — la phase d'étoile naine, lorsque, dans les circonstances inverses, la température décroît.

Il s'agit maintenant de confronter la théorie et l'observation : qu'un diagramme soit préparé, sur lequel à chaque étoile géante dont on connaît la masse et l'intensité lumineuse corresponde un point dont les coordonnées soient des mesures de ces deux grandeurs ; il faut que tous les points marqués se distribuent à peu près le long d'une même ligne bien régulière.

Cette confrontation est pleinement satisfaisante. — Mais il y a bien davantage (1) : les étoiles naines, aussi bien que les étoiles géantes, satisfont à la même condition. — Voilà qui est fort inattendu. — Comparons le Soleil et l'étoile géante correspondante : leur température commune est 5800°, mais leurs surfaces diffèrent énormément, et par conséquent, pour une même masse, leurs intensités lumineuses. La théorie n'a été faite que pour les étoiles géantes et on s'attendait, à cause de cette différence des intensités lumineuses, à ce que les étoiles naines ne la vérifient pas du tout : au contraire, elles la vérifient, et le Soleil est en bonne place sur la courbe du diagramme. — Va-t-on donc devoir reviser entièrement la théorie des étoiles naines et géantes ?

Il faut, en ceci, rester sur ce point d'interrogation, et répondre à une objection a priori. — Comment une masse dont la densité est (comme celle du Soleil) un peu supérieure à celle de l'eau, ou dont la densité est (comme celle des étoiles naines rouges) comparable à celle du platine, pourrait-elle se comporter à la manière d'un gaz parfait, se comprimer à la manière des gaz expérimentés à haute température dans les laboratoires ?

C'est ce dernier rapprochement qui n'est pas légitime aux très hautes températures qui règnent dans les étoiles. Dans les gaz terrestres, la compressibilité est ralentie, puis arrêtée par le volume propre aux molécules et aux atomes ;

(1) A. Eddington, *The relation between the masses and luminosities of the stars*, NATURE (Londres), t. 113 (1924), p. 786, et M. N., t. 84 (1923-1924), p. 308.

dans les gaz stellaires, les atomes sont ionisés (1) ; ils ont perdu leurs électrons périphériques ; leur volume a pu devenir 100 000 fois moindre ; et il faudra une densité 100 000 fois plus grande pour que le gaz comprimé s'écarte de la manière de se comporter d'un gaz parfait.

Peut-être ceci va-t-il expliquer un des « mystères » de l'Astronomie. Il s'agit du compagnon quasi obscur de Sirius : sa masse vaut les quatre cinquièmes de celle du Soleil, tandis que d'après son intensité lumineuse et son type spectral son rayon ne serait que de 20 000 km, ce qui lui ferait la densité formidable de 50 000 gr par cm^3. La même difficulté se pose, semble-t-il, à propos du compagnon, récemment découvert, de la variable Mira Ceti (2). L'ionisation des gaz en serait l'explication.

Applications astronomiques de la photoélectricité. — Atteint par une onde lumineuse, un conducteur à l état neutre acquiert une charge positive ; chargé négativement il perd sa charge négative. C'est le phénomène photoélectrique dont la découverte est due à Hertz, et auquel la Physique théorique attache si grande importance à cause de sa valeur démonstrative dans la théorie des quanta (3). — On sait aujourd'hui que le phénomène consiste dans l'émission d'électrons négatifs détachés des atomes voisins de la surface du métal par l'action de la lumière. On peut mesurer la vitesse avec laquelle les électrons quittent le conducteur, et, pour un métal déterminé et une longueur d'onde déterminée de la lumière incidente, on trouve pour cette vitesse des électrons toutes les vitesses non

(1) A propos de l'ionisation des atomes stellaires : E. Milne, *Stars of type O and the theory of high temperature ionisation*, OBS., t. 46 (1923), p. 113.

(2) Au début de 1923, après une étude de son spectre, H. Joy avait déclaré double la célèbre étoile variable Mira Ceti, o Baleine (POPULAR ASTRONOMY, p. 237) : son compagnon devait être une étoile faible, à une distance angulaire d'environ o″,3. Le compagnon a été aperçu par R. Aitken, le 19 octobre 1923 : étoile de dixième grandeur, à une distance angulaire o″,9 (A. S., PAC. t. 35, p. 323).

(3) J. H. Jeans, *The dynamical theory of gases*, 3me édition (Cambridge, 1921), p. 379.

supérieures à une limite bien déterminée, propre à ce métal et à cette longueur d'onde ; ce qui s'interprète immédiatement par l'hypothèse que cette vitesse limite est celle avec laquelle l'électron est extrait de l'atome, vitesse d'autant plus réduite, là où elle est observable, que l'électron provient d'un atome situé plus profondément en dessous de la surface. La relation entre la vitesse limite, la nature du métal et la longueur d'onde de la lumière incidente consiste en ce que la force vive de l'électron libéré est (à une constante près) proportionnelle à la fréquence de la radiation lumineuse. Cette relation, due à Einstein, est de la forme nécessaire à la confirmation de la théorie des quanta. Il reste à montrer, pour cette confirmation, que, quel que soit le métal expérimenté, le coefficient de proportionnalité a telle valeur numérique bien déterminée : la concordance est extrêmement satisfaisante (1).

(1) Si m est la masse de l'électron libéré, v sa vitesse non réduite (vitesse maximum observée), et ν la fréquence de la lumière incidente, l'équation d'Einstein est de la forme

$$\frac{1}{2} mv^2 = h\nu - p.$$

D'après la théorie des quanta, le terme $h\nu$, variable avec la fréquence, doit être le quantum caractéristique de la radiation ν, produit de la fréquence par la constante universelle h de Planck (Z. Carrière, *Radiations et quanta*, R.Q.S., 4me série, t. 4, 1923, p. 72), de sorte qu'il faut trouver $h = h$. En unités C.G.S., la constante de Planck a la valeur 6.55×10^{-27}, tandis que les mesures de h par Millikan ont donné les nombres $6,561 \times 10^{-27}$ et $6,585 \times 10^{-27}$, le premier sur le sodium, le second sur le lithium. — Quant au terme p, il peut s'écrire $h\nu_0$ moyennant une fréquence convenable ν_0.

$$\frac{1}{2} mv^2 = h(\nu - \nu_0),$$

fréquence qui définit la cessation du phénomène pour des longueurs d'onde de plus en plus grandes. Pour cette fréquence critique ν_0, l'ionisation s'arrête, de sorte que $h\nu_0$ est le travail d'ionisation de l'atome considéré, produit Ve de son potentiel d'ionisation par la charge d'un électron. A chaque métal correspond donc une longueur d'onde maximum : sodium 0,3400 μ ; potassium 0,4400 μ ; rubidium 0,4850 μ ; caesium 0,5500 μ.

La surface métallique irradiée par le flux lumineux, de préférence un métal alcalin, peut être disposée de façon que l'émission continue d'électrons devienne génératrice d'un courant mesurable à l'électromètre : pour une énergie lumineuse suffisamment faible, l'intensité du courant est proportionnelle à l'éclairement. Il en résulte, après étalonnage de l'appareil, la possibilité de mesurer l'éclairement, l'éclat apparent de la source lumineuse, et, par conséquent, s'il s'agit de la lumière d'une étoile, la grandeur de celle-ci. Le photomètre photoélectrique ainsi créé se montre d'une très grande sensibilité, au point de ne faire craindre, en photométrie stellaire, qu'une erreur de l'ordre du centième au millième de grandeur : c'est une approximation dix à cent fois meilleure que celle des autres photomètres.

L'une des premières applications astronomiques de la photoélectricité est due à W.Schulz (Chicago) et remonte à 1912 : son photomètre était déjà sensible au cent millième de bougie-mètre, et ses premiers essais portèrent sur Capella et Arcturus (1). D'autres photomètres photoélectriques furent créés à l'observatoire de Babelsberg (Berlin), à Tubingue et à l'observatoire astrophysique de Sidmouth. — Les détails les plus intéressants viennent d'être publiés sur la construction, l'étalonnage et les premières applications du photomètre photoélectrique de l'observatoire Lick (Mount Hamilton) (2). Ces premières études ont porté sur les étoiles variables. — Les problèmes qui se rencontrent à propos des étoiles variables se montrent de plus en plus captivants au fur et à mesure que les mesures photométriques sont plus précises : le type β Persée, où l'intensité lumineuse est sans cesse variable, et le type Algol, où l'on pensait les phases d'abaissement de l'intensité séparées par des phases d'intensité constante, semblent de moins en moins nettement distincts, et l'hypothèse des variables binaires à éclipses

(1) *The use of the photo-electric cell in stellar photometry, preliminary note,* APH. J., t. 38 (1923, 2), p. 187.

(2) E. Cummings, *The photoelectric photometer of the Lick Observatory and some results obtained with it,* LICK OBS. BULL., nº 349, t. 11 (1923), p. 99. — Voir aussi : G. Dobson (Oxford), *A flicker type of photo-electric photometer giving high precision,* PR. R. S., t. 104 (1923), p. 248.

va devoir être retouchée (1). D'autre part, dans l'observation photoélectrique des planètes, on pourra, de la période de leur luminosité, élucider définitivement les questions qui se posent encore à propos de leur rotation.

STRUCTURE DE L'UNIVERS

L'univers galactique. — Les progrès récents de notre connaissance de l'univers stellaire ont été si rapides que je paraîtrai remonter extrêmement loin en partant des travaux que publia Mädler au milieu du dix-neuvième siècle ; mais il pourra en résulter des rapprochements intéressants (2).

L'idée que l'univers stellaire auquel nous appartenons, le système galactique, a une forme généralement lenticulaire est due à W. Herschel, qui, il est vrai, y renonça dans ses derniers travaux. Elle a été reprise et développée par J. Herschel, et c'est dans ce cadre que se placèrent les recherches de Mädler. L'idée directrice de ces recherches était la suivante : de même que la gravitation fait toutes les planètes membres d'une même famille, la gravitation aussi doit apparenter toutes les étoiles, et toutes, sous l'empire de cette force, doivent graviter autour d'un certain point du système galactique, le centre dynamique de ce système. Une étoile qui occuperait ce centre se reconnaîtrait à ce que, défalcation faite du déplacement parallactique dû au mouvement propre du Soleil, son mouvement propre se réduirait à zéro, et cet excès du mouvement propre apparent sur le déplacement parallactique augmenterait d'une manière continue dans toutes les directions avec la distance angulaire à cette étoile. Ces conditions (et quelques-unes qui

(1) L'étoile *b* Persée reconnue comme variable en 1920 a été étudiée à l'Observatoire de l'Université de l'Illinois, et l'allure de sa courbe de lumière est due à la forme ellipsoïdale des deux composantes du système dans lequel elle consiste : J. Stebbins, *The ellipsoïdal variable star b Persei*, APH. J., t. 57 (1923, i), p. 1.

(2) Pour les recherches et la bibliographie de Mädler, voir : C. André, *Traité d'Astronomie stellaire*, t. 2 (Paris, 1900), p. 411...

en sont voisines) se vérifient bien pour les étoiles du groupe des Pléiades, et on a considéré Alcyone, l'étoile la plus brillante de ce groupe, comme jouant le rôle de Soleil central dans notre univers galactique. A cette époque, on ne possédait pas de mesure, directement obtenue, de la distance de cette étoile, mais on la déduisait, en vertu de cette conclusion, de son mouvement apparent : 192 années de lumière (1).

La découverte des courants d'étoiles a profondément modifié ces conceptions déjà anciennes (2), et la question principale sur laquelle les astronomes se divisent aujourd'hui est, dans l'hypothèse d'une forme généralement lenticulaire de l'univers galactique, celle des dimensions de cet ellipsoïde. — Sur cette forme lenticulaire, tout le monde est d'accord ; on y voit l'explication de la Voie lactée, perspective de l'univers stellaire regardé dans ses plus grandes dimensions, et dans les directions voisines du plan de plus grande condensation des étoiles, l'équateur galactique. La discussion ne porte guère non plus sur l'aplatissement de cette strate stellaire : il semble bien que le diamètre galactique est environ cinq fois plus grand que le diamètre perpendiculaire : dans l'état actuel du problème, celui-ci comporte essentiellement une inconnue : la grandeur du diamètre galactique. Ce problème résolu, se posera celui de la position du Soleil par rapport aux éléments de symétrie de l'univers stellaire.

Pour Newcomb, le diamètre galactique devait être voisin de 30 000 années de lumière ; Kapteyn, ne s'écartant pas très fort de cette appréciation, demandait 60 000 années de lumière ; c'est l'opinion que soutient aujourd'hui H. Curtis (Allegheny Obs.) tandis que H. Shapley (Mount Wilson) croit un diamètre d'au moins 300 000 années de lumière nécessaire à définir un univers galactique qui suffise à l'interprétation des phénomènes observés.

(1) On en déduisait aussi que la région qui entoure notre Soleil est relativement pauvre en étoiles, la distance moyenne des étoiles qui nous environnent semblant près de six fois plus grande que la distance moyenne calculée sur l'ensemble des étoiles.

(2) Contribution récente : P. Stroobant et P. Bourgeois, *Sur certaines étoiles dont le mouvement est égal et parallèle à celui du Soleil*, C. R., t. 177 (1923, 2), p. 584.

Partons des idées de Kapteyn (1). — Les étoiles dont la distance est connue sont de plus en plus nombreuses : l'application des méthodes trigonométrique, spectroscopique, photométrique, a fait monter leur nombre à plus de 3000 (2) ; ce sont les étoiles les plus proches du Soleil, toutes à l'intérieur du système galactique : ceci n'est pas en question. Parmi ces étoiles, il en est qui constituent des groupes, auxquels on peut déjà donner le nom d'amas, car il n'y a là qu'un effet de perspective, et ces groupes seraient-ils plus éloignés qu'ils se présenteraient à nos yeux de la même manière que, par exemple, l'amas de la constellation d'Hercule. De pareils groupes sont les belles étoiles bleues de la constellation d'Orion, les Hyades qui, dans le voisinage d'Aldébaran sont, avec celui-ci, la Poule et les Poussins de notre langage populaire, et les Pléiades, qu'on entend parfois appeler le Mouchoir de Sainte Véronique. Leurs distances sont de quelques centaines d'années de lumière (3). Mais il y a d'autres amas, beaucoup plus serrés, dont les étoiles sont beaucoup plus nombreuses, comme les Nuées de Magellan et, principalement, les amas globulaires (4).

(1) La conception de Kapteyn a été exposée d'une manière détaillée dans cette *Revue d'Astronomie* pour 1922 : R.Q.S., 4me série, t. 4 (1923, 2), p. 218 (p. 36 du tiré-à-part).

(2) C. Nordmann et C. Le Morvan, *Observations des Pléiades au photomètre hétérochrome de l'Observatoire de Paris et sur une méthode nouvelle pouvant permettre de déterminer par la photométrie les parallaxes stellaires*, C.R., t. 176 (1923, 1), p. 1054.

(3) Détermination récente : H. Alden, *Trigonometric Parallax of the Pleiades*, AN. J., t. 35 (1923), p. 61. Ce travail comporte la détermination photographique de la distance de 22 étoiles des Pléiades : la valeur conclue est 270 années de lumière, à quoi correspondrait un diamètre de l'amas égal à 30 années de lumière, et, pour Alcyone, une grandeur absolue (à dix parsecs de distance) égale à —1.6. On y trouve une intéressante confirmation de l'affirmation de Mädler d'après laquelle les Pléiades seraient, dans l'ensemble des étoiles, quasi stationnaires.

(4) Les Nuées de Magellan, — la grande et la petite nuée, — sont, à l'œil nu, deux petites taches claires du ciel austral, dans le voisinage de la Voie lactée et de la Croix du Sud. L'observation photographique y montre des étoiles extrêmement nombreuses, de l'ordre de 100 000 pour la grande nuée, de 200 000 pour la petite. —Leur distance a fait récemment à Arequipa l'objet de mesures

Il y a, à propos de ces amas, un point sur lequel l'accord est fait : c'est que ces formations appartiennent sûrement à l'univers galactique. La raison s'en trouve dans leur plus grande abondance dans le voisinage de l'équateur galactique, symétriquement par rapport à ce plan. Il n'y aurait aucune raison pour qu'il en soit ainsi, il y aurait indifférence complète de leur distribution vis-à-vis de la Voie lactée, si ces amas constituaient des univers en dehors du nôtre.

Voici maintenant le raisonnement par lequel Shapley démontre l'immensité du système galactique (1). — Dans tel amas globulaire (et ces considérations s'appliquent aux autres), la grandeur (photographique) moyenne des vingt-cinq étoiles les plus brillantes est 14,2. L'amas est d'autant plus éloigné que la grandeur moyenne absolue (à une distance que définit la parallaxe o″,1) de ces étoiles est plus considérable. Dans tous les amas voisins du Soleil se trouvent des étoiles géantes et la grandeur absolue d'Alcyone, dans

nouvelles (OBS., t. 46, 1923, p. 57) : les distances de la grande et de la petite nuée seraient respectivement de 110 000 et de 60 000 années de lumière : on va voir combien ces résultats appuient la thèse de Shapley, d'un univers galactique très étendu.

(1) H. Shapley et H. Curtis, *The scale of the universe*, BULLETIN OF THE NATIONAL RESEARCH COUNCIL (Washington), t. 2, 3me partie, nº 11 (1921), p. 171. — Dans ce travail, dû à la collaboration des deux adversaires, Curtis expose ses raisons de ne pas admettre la thèse de Shapley : ces raisons s'appuient surtout sur la considération des nébuleuses spirales, dont il sera parlé ci-dessous, et sur la nécessité qu'il y aurait, pour pouvoir placer des nébuleuses encore en dehors de l'immense univers de Shapley, d'attribuer aux étoiles brillantes qu'elles renferment des intensités lumineuses invraisemblables. — Synthèse toute récente : H. Shapley et A. Cannon, *Summary of a study of stellar distribution*, PROC. OF THE AMERICAN ACAD. OF ARTS AND SCIENCES, t. 59, nº 9 (1924), p. 215 ; de même : H. Shapley, *The distribution of the stars*, THE SCIENTIFIC MONTHLY, t. 18 (1924), p. 449. — Lire aussi : R. Aitken, *Recent progress in our knowledge of the universe*, SCIENCE (New York), t. 58, nº 1507 (1923), p. 381 ; H. Curtis, *Les nébuleuses spirales et la constitution de l'univers*, SCIENTIA, t. 35 (1924, 1), p. 1 (p. 1 du supplément). — Rapprocher de R. Wilson, *The proper-motion and mean parallax of the cepheid variables*, AN. J., t. 35 (1923), nº 821, p. 35, pour qui les dimensions galactiques proposées par Shapley sont en dessous de la réalité et doivent être augmentées de près d'un tiers.

les Pléiades, est proche de —2. Mais, effet de perspective écarté, ces amas ne diffèrent en rien des amas globulaires ; et il n'est pas croyable que les amas globulaires lointains soient dépourvus d'étoiles brillantes. Dans l'amas globulaire considéré, il suffit que la grandeur moyenne absolue de ses vingt étoiles les plus brillantes soit — 1,5 pour que sa distance s'élève à 45 000 années de lumière ; d'où la nécessité d'un univers galactique extrêmement étendu (1).

L'adoption des idées de Shapley fait naître une tout autre conception de la structure de l'univers, — tout autre que celle de Newcomb et de Kapteyn, mais non point tout à fait nouvelle : on va y retrouver l'idée de W. Herschel qui, vers la fin de sa vie (1818), reconnaissait dans notre univers stellaire « une collection immense d'amas d'étoiles surtout irrégulièrement condensées ». — Kapteyn, en effet, se serait complètement trompé en extrapolant, jusqu'aux limites de la Voie lactée, les résultats de ses sondages stellaires dans notre voisinage immédiat. Il est vrai qu'à peu près dans toutes les directions, autour de notre Soleil, les étoiles sont de moins en moins pressées ; mais cette diminution de densité stellaire ne se prolonge pas indéfiniment. Elle démontre seulement que nous nous trouvons dans le voisinage du centre d'un des amas stellaires dont l'ensemble constitue l'univers galactique; et loin d'être situé à peu de distance du centre de cet univers, notre amas stellaire local s'en trouverait séparé par 50 000 années de lumière.

Nébuleuses spirales. — Le raisonnement de Shapley repose essentiellement sur l'étude des amas, et sur le fait que ces amas ne sont pas en dehors de l'univers galactique. — Comment se pose, de ce point de vue, la question des nébuleuses ?

(1) Au fond, les arguments de Shapley et de Curtis portent sur des terrains différents, et ne se rencontrent pas. Celui-ci invoque les nébuleuses ; celui-là se refuse à en parler : il signale la difficulté que fait naître une galaxie très étendue dans l'interprétation des nébuleuses spirales, mais ceci est un « debatable problem » qui ne doit être abordé qu'après que, par l'étude des amas, membres de l'univers galactique, les dimensions de cet univers seront connues d'une manière satisfaisante.

Les nébuleuses irrégulières, comme la grande nébuleuse d'Orion dans laquelle est plongée l'étoile sextuple de cette constellation, les nébuleuses annulaires, comme celle qui entoure d'une couronne telle étoile de la Lyre, les nébuleuses planétaires, comme celles dans lesquelles on a vu se transformer des étoiles nouvelles, toutes ces nébuleuses, dont le spectre est un spectre d'émission à raies brillantes, sont des formations liées aux étoiles, et situées sûrement à l'intérieur de notre univers galactique.

Mais il y a ces magnifiques formations que sont les nébuleuses spirales, et dont la plus connue est la grande nébuleuse d'Andromède, d'un diamètre de 10′, avec leurs grandes traînées qui semblent se dérouler du noyau de la nébuleuse. Leur spectre est continu, comme celui du Soleil, avec des raies d'absorption, comme si ces nébuleuses étaient, en réalité, des amoncellements d'étoiles extrêmement lointaines. Les étoiles s'y déplacent comme des molécules dans un tourbillon. L'observation spectroscopique et l'application du principe de Doppler sur le décalage des raies leur font attribuer un déplacement très rapide, de jusque 1000 km par seconde et qui est presque toujours, par rapport à nous, un éloignement. On y a vu apparaître, comme des novæ, des objets de seizième à dix-huitième grandeur. Enfin, tout récemment, on a pu constater que le centre y est plus rouge que les bords. — Elles sont extrêmement nombreuses : les miroirs des grands télescopes américains recueillent et concentrent la lumière de près d'un million de nébuleuses spirales.

L'interprétation la plus immédiate est que les nébuleuses spirales sont autant d'univers indépendants dont chacun est analogue à notre univers galactique, dont chacun est un univers galactique vu du dehors, avec, immensément nombreux, ses amas d'étoiles et ses nébuleuses proprement dites.

Y a-t-il accord unanime sur cette interprétation simple ? Bien loin de là, et, actuellement de moins en moins,— ce qui tient aux liens géométriques et cinématiques qui semblent unir les nébuleuses spirales à notre propre galaxie.

Il y a d'abord cette grande vitesse d'éloignement, cette répulsion de presque toutes les nébuleuses spirales à partir

de la région que nous occupons dans l'univers galactique, et que la pression de radiation est tout à fait insuffisante à expliquer (1). Les relativistes disent : il n'y a, moyennement, pas de dispersion ; un effet Doppler d'éloignement se manifeste comme un effet Einstein de déplacement des raies du spectre vers l'extrémité rouge, dans une lumière émanée de champs gravitiques intenses, et c'est l'effet Einstein qui est le véritable phénomène (2).

Il y a aussi la manière dont les nébuleuses spirales sont distribuées en latitude galactique : elles sont moyennement d'autant plus rares que cette latitude est moindre ; elles s'aperçoivent de plus en plus nombreuses au fur et à mesure qu'on les cherche plus loin de la Voie lactée, comme s'il y avait incompatibilité entre leur abondance et la richesse du ciel en amas globulaires. — Les uns répondent : il y a, dans tout le ciel, abondance uniforme des nébuleuses spirales, mais dans la Voie lactée, et de moins en moins lorsqu'on s'en éloigne, la luminosité générale du ciel empêche de les apercevoir (3). — D'autres, récemment, ont dit : cette distribution, en latitude galactique, des nébuleuses spirales demande révision (4) ; et, révision terminée, on a vu que les choses ne sont pas aussi simples : la latitude galactique est sans signification sur les nébuleuses spirales de grand diamètre angulaire, tandis qu'elle semble vraiment jouer un rôle dans la distribution des petites nébuleuses : il reste

(1) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, R.Q.S., 4me série t. 2 (1922, 2), p. 198 (p. 31 du tiré-à-part).

(2) A. Eddington, *The mathematical theory of Relativity*, Cambridge, 1923, p. 162.

(3) Dans les régions obscures de la Voie lactée, ce sont les nébuleuses obscures qui empêcheraient la perception des nébuleuses spirales. Article récent sur les nébuleuses obscures, H. Macpherson, *Recent progress in the study of the nebulae*, OBS., t. 46 (1923), p. 243.

(4) J. Reynolds, *The planes of the spiral nebulae in relation to the line of sight*, M. N., t. 82 (1921-1922), p. 510 ; *The galactic distribution of the spiral nebulae, with special reference in galactic longitude*, Ibid., t. 83 (1922-1923), p. 147 ; *The galactic distribution of the small spiral, spheroidal and lenticular nebulae*, Ibid., t. 8. (1923-1924), p. 76. — Discussion sur ce sujet dans OBS., t. 46, p. 51, 65, 190. Voir aussi : C. Perrine, *The origin of the spiral nebulae*, OBS., t. 46, p. 272, et la discussion, Ibid., p. 305, 338.

vrai aussi que nébuleuses spirales et amas globulaires semblent s'exclure.

A l'hypothèse impressionnante d'un million d'univers comparables à notre univers galactique, on a opposé récemment l'hypothèse bien humble d'après laquelle les nébuleuses spirales ne seraient que des tourbillons de poussières cosmiques, sans lumière propre, et réfléchissant la lumière que leur envoie le fourmillement de soleils qui se pressent dans le voisinage de l'équateur galactique (1). Dans de pareils tourbillons on trouvera la forme des nébuleuses spirales et les mouvements de rotation qu'on y a constatés, la lumière stellaire réfléchie donnera le spectre observé, la pression de radiation s'exercera efficacement sur des poussières de l'ordre du millième de millimètre et les chassera loin du plan galactique avec une vitesse qui, dans le spectre de leur lumière réfléchie, ne sera cependant que la moitié de celle que donnerait, sans correction, le principe de Doppler-Fizeau. L'explication des novae est assez pénible : ce serait l'effet de collisions du nuage cosmique avec des corps analogues aux comètes ; mais cette hypothèse semble la seule qui permette d'expliquer la diminution de longueur d'onde de la lumière émise — du rouge au bleu — lorsqu'on passe du centre à la périphérie : au centre sont restées accumulées les poussières les plus grosses, — vers les bords se sont échappées les particules les plus fines, et sur celles-ci ne peuvent se réfléchir que les radiations lumineuses de faible longueur d'onde, celles dont les longueurs d'onde sont comparables à leurs dimensions.

(1) F. Lindemann (Oxford), *Note on the constitution of the spiral nebulae*, M. N., t. 83 (1922-1923), p. 354. — J. Reynolds, *Note on Professor Lindemann's paper on the constitution of the spiral nebulae*, Ibid., p. 382 ; ce deuxième article appuie le premier et lui apporte de nouveaux arguments.

N° 10.

Meilleure approximation dans la détermination du pôle terrestre instantané et essai de systématisation des recherches sur la déviation de la verticale,

par M. M. Alliaume (1).

1. Les axes de repère OXYZ sont géocentriques, avec l'axe Z dirigé vers le pôle nord à un instant t_0. A cet instant, les coordonnées géographiques d'un point terrestre M sont une longitude λ et une latitude φ. A un instant t, ces coordonnées polaires par rapport aux axes OXYZ sont devenues $(\lambda + \delta\lambda,\ \varphi + \delta\varphi)$, tandis que la verticale du pôle a pris un angle de position ω et se trouve à une distance angulaire θ de l'axe Z; la latitude du point M est devenue $(\varphi + \Delta\varphi)$; $\delta\varphi$ est la variation de latitude due à la seule déviation de la verticale; $\Delta\varphi$ est la variation de latitude due à la fois au déplacement de l'axe de rotation et à la déviation de la verticale. Ces quantités satisfont à l'équation

$$\sin(\varphi + \delta\varphi)\cos\theta + \cos(\varphi + \delta\varphi)\sin\theta\cos(\lambda + \delta\lambda - \omega) = \sin(\varphi + \Delta\varphi) :$$

telle est, en coordonnées polaires (ω, θ), l'équation de la surface

---

(1) Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (*Bulletin de la Classe des Sciences*, 2e sér., t. X [1924], p. 331).

lieu de perpendiculaires au géoïde, à laquelle appartient, à l'instant t, la verticale du pôle.

Les déplacements angulaires de la verticale du pôle sont petits, et les déviations de la verticale sont petites vis-à-vis de ces premiers déplacements : $\Delta\varphi$ est une quantité petite du premier ordre; $\delta\lambda$ et $\delta\varphi$ sont des quantités petites du second ordre. Définissons notre approximation en convenant de négliger les quantités petites à partir du troisième ordre. L'équation à laquelle satisfont les coordonnées (ω, θ) du pôle devient

$$\theta \cos\lambda \cos\omega + \theta \sin\lambda \sin\omega = \Delta\varphi - \delta\varphi + \frac{\theta^2}{2} \operatorname{tg}\varphi - \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} \operatorname{tg}\varphi.$$

Dans un plan repéré par des axes xy, faisons la représentation cartographique du géoïde définie par les équations de correspondance

$$x = \mu c \theta \cos\omega,$$
$$y = \mu c \theta \sin\omega,$$

où μc est un facteur quelconque : si c est le rayon de courbure, censé unique, du géoïde au pôle de l'époque t_0, μ est l'échelle de la carte au point $\theta = 0$, image de ce pôle. L'élimination de θ et ω laisse l'équation

$$x \cos\lambda + y \sin\lambda = c\mu(\Delta\varphi - \delta\varphi) + \frac{\mu}{2} \frac{x^2 + y^2}{c} \operatorname{tg}\varphi - \frac{\mu c}{2} (\Delta\varphi)^2 \operatorname{tg}\varphi$$

d'une circonférence de la carte, à laquelle appartient l'image du pôle à l'époque t. C'est en négligeant les termes petits du deuxième ordre qu'on réduirait cette équation à la formule de Kostinsky, habituellement (ou exclusivement) utilisée, sauf le terme empirique introduit par Kimura et auquel on semble aujourd'hui renoncer.

2. Supposons pour un instant que la déviation de la verticale soit entièrement négligée et qu'on dispose des coordonnées géographiques (λ_i, φ_i) de n points M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ à une époque t_0, ainsi que des variations $\Delta\varphi_i$ de leurs latitudes de l'époque t_0 à une époque t. Les coordonnées (x, y) demandées

sont les valeurs les plus avantageuses satisfaisant aux n équations du second degré

$$x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i = c\mu\Delta\varphi_i + \frac{\mu}{2}\frac{x^2+y^2}{c} \operatorname{tg} \varphi_i - \frac{\mu c}{2}(\Delta\varphi_i)^2 \operatorname{tg} \varphi_i.$$

Que l'on convienne de faire cette recherche par la méthode des moindres carrés. Soient, en première approximation, (x_0, y_0) les solutions de cette méthode appliquée aux équations

$$x \cos \lambda_i + y \sin \lambda_i = c\mu\Delta\varphi_i,$$

à savoir les racines des équations linéaires

$$x_0[\cos \lambda . \cos \lambda] + y_0[\cos \lambda . \sin \lambda] = c\mu[\cos \lambda . \Delta\varphi],$$
$$x_0[\sin \lambda . \cos \lambda] + y_0[\sin \lambda . \sin \lambda] = c\mu[\sin \lambda . \Delta\varphi].$$

En vue de la deuxième approximation, posons

$$x = x_0 + \Delta x,$$
$$y = y_0 + \Delta y,$$

où Δx, Δy sont des quantités petites du deuxième ordre; posons aussi

$$r_i = x_0 \cos \lambda_i + y_0 \sin \lambda_i - c\mu\Delta\varphi_i.$$

A cette approximation nouvelle, l'équation générale en (x, y) se transforme dans

$$\Delta x \cos \lambda_i + \Delta y \sin \lambda_i + r_i = \frac{\mu}{2}\frac{x_0^2+y_0^2}{c} \operatorname{tg} \varphi_i - \frac{\mu c}{2}(\Delta\varphi_i)^2 \operatorname{tg} \varphi .$$

Comme on a identiquement

$$[\cos \lambda . r] = 0,$$
$$[\sin \lambda . r] = 0,$$

les valeurs les plus probables des corrections de deuxième approximation $(\Delta x, \Delta y)$ résulteront de l'application de la méthode des moindres carrés aux équations linéaires

$$\Delta x \cos \lambda_i + \Delta y \sin \lambda_i = \frac{\mu}{2}\frac{x_0^2+y_0^2}{c} \operatorname{tg} \varphi_i - \frac{\mu c}{2}(\Delta\varphi_i)^2 \operatorname{tg} \varphi_i.$$

3. Pour respecter l'approximation convenue, reprenons la déviation $\delta\varphi$ de la verticale en latitude. Si les $\delta\varphi_i$ des divers points M_i sont connus par des observations indépendantes de la latitude, les coordonnées (x, y) du pôle instantané se trouveront comme dans l'hypothèse précédente : il suffira d'ajouter le nombre $-c\mu\delta\varphi_i$ à chaque $i^{\text{ème}}$ équation de deuxième approximation. Pour diverses raisons, théoriques et pratiques, ce procédé ne sera probablement pas (du moins appliqué seul) satisfaisant : il sera préférable de développer $\delta\varphi_i$ en série trigonométrique, par rapport au temps, jusqu'aux termes de tel ordre, et de déterminer par la théorie des erreurs les valeurs numériques des coefficients de ce développement.

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans les circonstances suivantes, décrites dans l'hypothèse) légitime à l'approximation actuelle mais non essentielle) d'un géoïde sphérique. L'étude des déformations élastiques du globe a montré que ces déformations peuvent être considérées comme la superposition de m ondes, dont chacune, telle que la $k^{\text{ème}}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$), parcourt la surface terrestre, d'un mouvement uniforme, en un temps T_k, autour d'un diamètre $(\lambda_k, \varphi_k; \lambda_k + \pi, -\varphi_k)$; soit τ_k l'instant du passage de la crête de cette onde au demi-grand cercle issu de ce diamètre et renfermant un point terrestre déterminé, tel que le point G, auquel appartient, par définition, le méridien initial; supposons encore que, le long d'un demi-grand cercle issu du diamètre qu'elle n'affecte pas, la déformation ait une allure sinusoïdale, sans autres points demeurés en place que les extrémités de ce diamètre. L'onde k, à l'instant t, coopère à la déviation de la verticale en latitude au point (λ, φ) par un terme de la forme

$$A_k \sin\delta \sin\frac{2\mu(t-\tau_k)}{T_k},$$

où δ est tel que

$$\cos\delta = \sin\varphi \sin\varphi_k + \cos\varphi \cos\varphi_k \cos(\lambda - \lambda_k),$$

de sorte que

$$\delta\varphi_i = \sum_{k=1}^{m} A_k \sin \operatorname{arc\,cos}\{\sin\varphi_i \sin\varphi_k + \cos\varphi_i \cos\varphi_k \cos(\lambda_i - \lambda_k) \sin \frac{2\pi(t-\tau_k)}{T_k}.$$

4. En résumé, les corrections de seconde approximation des coordonnées de l'image cartographique du pôle instantané se déduiront de l'application de la théorie des erreurs aux équations ci-dessus en $(\Delta x, \Delta y)$, dont chaque $i^{\text{ème}}$ aura été complétée, dans son second membre, par le terme $-c\mu\delta\varphi_i$, avec l'expression de $\delta\varphi_i$ qui vient d'être écrite. Ceci constituera un système de n équations aux $(2 + m)$ inconnues Δx, Δy, A_1, A_2, ..., A_m, et la résolution de ce système pourra être envisagée lorsque le nombre n de stations d'observation l'emportera d'au moins deux unités sur le nombre m des termes périodiques dans lesquels la théorie des déformations élastiques du globe et la discussion des ordres de grandeur de ces termes successifs auront décomposé la déviation de la verticale en latitude.

Enfin, si l'on estime applicables au globe terrestre les hypothèses sur lesquelles repose une théorie, poussée jusqu'au bout (à une approximation convenable), des déformations élastiques d'un sphéroïde dans un champ de forces assimilable à celui qui est dû à la Lune et au Soleil, on pourra exprimer les divers coefficients A_k en fonction du coefficient de rigidité ρ et du module d'élasticité E de la Terre, et la théorie des erreurs aura à résoudre un système de n équations aux quatre inconnues Δx, Δy, ρ et E.

N° 11

Généralisation du théorème de Poisson relatif à la probabilité d'un événement dont la cause a subi une modification inconnue,

par M. M. Alliaume (1).

D'après un théorème dû à Poisson, la probabilité d'extraire un billet déterminé hors d'une urne ne change pas lorsque la composition de l'urne subit une modification inconnue. Cette note a pour objet l'extension de ce théorème au cas dans lequel il y a extraction simultanée d'un nombre quelconque de billets, et où l'événement attendu consiste en ce que ces billets appartiennent à la même espèce.

Une urne renferme μ_1 billets portant le n° 1, μ_2 billets portant le n° 2,... et ainsi de suite jusqu'à μ_q billets portant le n° q : en tout

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_q = \Sigma\mu \text{ billets.}$$

Si l'on tire n billets, où n est au plus égal au moindre des nombres μ_i, la probabilité que ces n billets portent un même numéro i déterminé est

$$C^n_{\mu_i} : C^n_{\Sigma\mu},$$

et celle qu'ils portent un même numéro quelconque est

$$P_n = \sum_{i=1}^{i=q} C^n_{\mu_i} : C^n_{\Sigma\mu}.$$

D'autre part, de la même urne, on extrait un groupe de m billets et, de ce groupe, on extrait ensuite n billets : $n \leq m$ On se propose de calculer la probabilité P_m que ces

---

(1) Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (*Bulletin de la Classe des Sciences*, 2e sér., t. X [1924], p. 336).

n billets portent un même numéro quelconque et de montrer que, indépendamment de m,

$$P_m = P_n.$$

Si P_{mi} est la probabilité d'extraire n billets portant un même numéro déterminé i,

$$P_m = \sum_{i=1}^{i=q} P_{mi}.$$

Pour que se réalise l'événement dont la probabilité est P_{mi}, il faut que le groupe de m billets en renferme au moins n de l'espèce proposée : qu'il en renferme n, ou $(n+1)$, ou $(n+2)$,... jusqu'au nombre μ, qui sera le moindre des nombres m et μ_i. De plus, dans chacun de ces cas, il faut que les n billets extraits soient parmi ceux dont la présence a déjà été exprimée. P_{mi} est donc une somme dont chaque terme est une probabilité composée, produit de deux facteurs :

Premier terme, probabilité de n numéros déterminés, pour n seulement des billets attendus se trouvant dans le groupe de m billets :

$$\frac{C_{\mu_i}^{n}\, C_{\Sigma\mu-\mu_i}^{m-n}}{C_{\Sigma\mu}^{m}} \cdot \frac{C_n^n}{C_m^n};$$

deuxième terme, probabilité correspondante pour $(n+1)$ billets attendus se trouvant parmi les m billets extraits :

$$\frac{C_{\mu_i}^{n+1}\, C_{\Sigma\mu-\mu i}^{m-n-1}}{C_{\Sigma\mu}^{m}} \cdot \frac{C_{n+1}^n}{C_m^n}; \ldots$$

et ainsi de suite jusqu'au terme correspondant au cas où les m billets extraits renferment le nombre minimum μ de billets pouvant appartenir à l'espèce attendue :

$$\frac{C_{\mu_i}^{\mu}\, C_{\Sigma\mu-\mu_i}^{m-\mu}}{C_{\Sigma\mu}^{m}} \cdot \frac{C_\mu^n}{C_m^n}.$$

Ainsi

$$P_{mi} = \sum_{j=n}^{j=\mu} \frac{C_{\mu_i}^{j}\, C_{\Sigma\mu-\mu_i}^{m-j}}{C_{\Sigma\mu}^{m}} \cdot \frac{C_j^n}{C_m^n}$$

et

$$P_m = \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=n}^{j=u} \frac{C_{\mu_i}^{j} C_{\Sigma\mu-\mu_i}^{m-j}}{C_{\Sigma\mu}^{m}} \cdot \frac{C_j^n}{C_m^n},$$

ce qui peut s'écrire

$$P_m = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{C_{\mu_i}^{n}}{C_{\Sigma\mu}^{n}} \sum_{j=n}^{j=u} \frac{C_{\mu_i-n}^{j-n} C_{\Sigma\mu-\mu_i}^{m-j}}{C_{\Sigma\mu-n}^{m-n}}.$$

Or, dans le terme général de la somme intérieure, la somme des indices inférieurs au numérateur est égale à l'indice inférieur au dénominateur, et il en est de même pour les indices supérieurs, quels que soient i et j. Il en résulte que ce terme général est la probabilité qui répond au problème suivant :

Une urne renferme $(\Sigma\mu - n)$ boules, dont $(\mu_i - n)$ blanches et $(\Sigma\mu - \mu_i)$ rouges; on extrait $(j - n)$ boules; quelle est la probabilité qu'elles soient blanches?

Si j prend deux valeurs distinctes admissibles, ou telles que

$$n \leq j \leq \mu,$$

les expressions correspondantes sont les probabilités de deux événements contraires. Si j prend toutes les valeurs possibles, valeurs entières de n à μ, les $(\mu - n + 1)$ expressions correspondantes sont les probabilités d'événements contradictoires, et leur somme vaut l'unité :

$$\sum_{j=n}^{j=u} \frac{C_{\mu_i-n}^{j-n} C_{\Sigma\mu-\mu_i}^{m-j}}{C_{\Sigma\mu-n}^{m-n}} = 1,$$

quel que soit i; de sorte que

$$P_m = \sum_{i=1}^{i=q} C_{\mu_i}^{n} : C_{\Sigma\mu}^{n},$$

valeur indépendante de m et dans laquelle on retrouve l'expression de P_n.

Marcel Hayez, Imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

N° 12.

Astronomie et Relativité

Bilan de 1923

par M. M. Alliaume (1)

—

(*) Sommaire. — *La translation de la Terre et la propagation de la lumière :* les axes de la Mécanique classique, les axes liés à l'éther, les axes de la Relativité restreinte, vitesse de la lumière indépendante de la vitesse de la source, l'invariance de la vitesse de la lumière, signification de l'expérience de Michelson, résultat positif d'une expérience nouvelle, essai de nouvelles théories de la lumière.

Le déplacement du périhélie de Mercure : la géométrisation de la Mécanique, la structure de l'espace-temps, la trajectoire relativiste d'une planète, interprétation classique de cette trajectoire (la masse fonction de la vitesse), la durée des révolutions planétaires.

La déviation gravifique des rayons lumineux : les observations faites pendant l'éclipse de septembre 1922, le rôle possible de la réfraction annuelle.

La Relativité et le spectre solaire : confirmations récentes de la Relativité générale.

Compléments : le terme relativiste de la précession de l'équinoxe ; la « courbure » de l'espace-temps et les dimensions de l'univers.

(*) *Abréviations bibliographiques.* — R.Q.S. = Revue des Questions scientifiques (Louvain). — C.R. = Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris. — Pr. R. S. = Proceedings of the Royal Society, Series A, Mathematical and Physical Sciences (Londres). — M. N. = Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (Londres). — Ph. M. = Philosophical Magazine (Londres). — Obs. = The Observatory (Londres). — An. J. = The Astronomical Journal (Albany, N.-Y.). — A. N. = Astronomische Nachrichten (Kiel).

(1) Revue des Questions scientifiques, 4me série, t. 6 (1924, 2), p. 471.

LA TRANSLATION DE LA TERRE ET LA PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

La Mécanique classique repose essentiellement sur le principe de l'inertie. Pris à rebours de ce qu'on fait d'habitude, ce principe peut s'énoncer de la manière suivante : lorsqu'un corps possède un mouvement qui n'est pas rectiligne et uniforme, il subit une influence extérieure, il est soumis à une force. Sous cette forme, cet énoncé est évidemment insuffisant ; davantage : il n'a aucun sens. Un même corps a un mouvement rectiligne et uniforme, ou rectiligne et varié, ou curviligne et uniforme, ou curviligne et varié, suivant que les positions successives et les instants de ces positions sont mesurés par tel ou tel observateur, d'après les manières de se mouvoir de ces divers observateurs les uns par rapport aux autres. En d'autres termes, l'énoncé du principe de l'inertie doit se comprendre : il existe un système de repère (1) par rapport auquel un corps ne subissant aucune influence extérieure ne pourrait qu'être au repos ou avoir un mouvement rectiligne et uniforme.

Qu'un pareil système d'axes de repère soit découvert : on en connaîtra, par le fait, une infinité d'autres ; et non seulement parce que jouiront de la même propriété tous les systèmes solidaires du premier, immobiles par rapport à lui, ce qui est évident ; mais l'indétermination est bien plus grande. Jouira de la même propriété tout système d'axes de repère qui n'aura, par rapport au premier, qu'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Convenons de dire, pour abréger, que les axes de la Mécanique, les axes par rapport auxquels les principes de la Mécanique sont vrais, possèdent une indétermination cinématique (2).

Encore faut-il que nous connaissions un pareil système

(1) Il faut dire : un système de repère et une manière de compter le temps. La considération de la manière de compter le temps est trop éloignée de notre but actuel pour que nous la fassions intervenir ici.

(2) Mieux : une indétermination cinématique du premier ordre

d'axes. On dit généralement : toutes les observations prouvent, quelque sévère que soit l'approximation, que pareil système de repère est défini par l'ensemble des étoiles considéré comme invariable, par le solide stellaire. Cette proposition fait naître bien des difficultés : car on a beau considérer comme indéformable l'ensemble des étoiles, il n'en est pas moins vrai qu'elles se meuvent les unes par rapport aux autres, que le solide stellaire est une fiction. Et il ne suffit pas, du moins à priori, de dire qu'il en est pratiquement ainsi, car nous devons avoir assez le respect des définitions pour ne pas nous contenter d'à peu près qui ne tiennent que grâce à des concessions permises — actuellement — par les circonstances des applications pratiques.

Il n'y a pas lieu ici d'élucider ces difficultés, et tenons-nous-en, vaille que vaille, à l'ensemble indéformable des étoiles, au solide stellaire (1).

Des phénomènes purement mécaniques, passons à la propagation de la lumière. Dans sa révolution annuelle autour du Soleil, la Terre se meut par rapport aux axes de la Mécanique, tout cinématiquement indéterminés qu'ils soient, et avec une vitesse moyenne dont elle s'écarte peu, de 30 km. par seconde. Pour un observateur terrestre, ce mouvement se complique de la rotation diurne autour de l'axe du globe. Un rayon lumineux émané d'une étoile arrive à l'observateur terrestre. Celui-ci ne ressent pas le rayon, n'observe pas l'étoile dans la direction vraie de celle-ci, de la même manière que, dans un train de chemin de fer, sous une averse verticale, les voyageurs voient les gouttes de pluie strier les vitres du compartiment obliquement par rapport aux membrures verticales des châssis, et d'autant plus obliquement que la vitesse est plus considérable. Ce

(1) Article récent : P. Appell, *Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu*, C.R., t. 166 (1918, 1), p. 513. Conclusion de cet article : il faut « considérer comme immobile un certain système par rapport auquel les principes de la Mécanique sont, suivant toute probabilité, très sensiblement exacts, et auquel on rapporte instinctivement le mouvement propre du Soleil, les mouvements propres des étoiles et des nébuleuses. C'est ce système qu'il convient, par définition, de regarder comme au repos absolu dans l'univers et qui sert de référence au mouvement absolu ».

phénomène est, pour l'observateur terrestre d'une étoile, l'aberration astronomique : une étoile *quelconque* ne s'apercevrait dans sa direction vraie, l'aberration ne serait nulle, que si l'astronome était immobile dans un système de repère par rapport auquel la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions (1). Les divers systèmes de repère par rapport auxquels il en est ainsi sont évidemment solidaires les uns des autres : exprimons ceci en disant que les axes de la lumière possèdent une indétermination géométrique (2) ; et coupons au court en rappelant que l'ensemble invariable des étoiles, déjà solide de repère des principes de la Mécanique, est aussi celui auquel sont liés les axes de repère des phénomènes lumineux.

Ceci nous amène assez près des travaux astronomiques récents pour que nous devions insister. Les objections aux propositions précédentes peuvent se grouper en deux catégories : pour les uns, ces propositions dépassent les possibilités physiques ; pour les autres, elles les restreignent, et l'indétermination des axes de la lumière est davantage que géométrique.

Peut-on parler d'un milieu par rapport auquel la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions ? Il est nécessaire, pour ceci, que la vitesse de la lumière soit indépendante de celle de la source lumineuse. Cette indépendance n'aurait pas lieu si la lumière était une émission, comme le pensait Newton. La vieille théorie de Newton, condamnée comme telle depuis longtemps, a été rajeunie par Ritz, et W. de Sitter (Leyde) s'est préoccupé d'y trouver des objections astronomiques (3).

(1) Si l'astronome ne pouvait observer qu'une seule étoile, il y aurait encore aberration nulle lorsque, par rapport à ce système de repère, le point d'observation aurait sa vitesse constamment dirigée suivant une droite passant par l'unique étoile observée.

(2) Ou indétermination cinématique d'ordre zéro.

(3) W. de Sitter, *Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*, PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT, t. 14 (1913), p. 429 ; *Ueber die Genauigkeit, innerhalb welcher die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle behauptet werden kann*, IBID., p. 1267 ; *Radial velocity and intensity of light*, ASTRONOMICAL INSTITUTES OF NETHERLANDS, t. 2, n° 57 (1924). — Voir aussi : La Rosa, *La costituzione delle variabili del*

Si la vitesse de la lumière dépendait de celle de la source lumineuse, les trajectoires apparentes des composantes d'une étoile double ne seraient pas des ellipses le long desquelles, après une restitution perspective, les composantes de l'étoile se mouvraient l'une autour de l'autre conformément à la loi de l'attraction universelle. Or, dans les étoiles binaires spectroscopiques, c'est précisément par l'observation des déplacements des raies spectrales, pour une vitesse constante de la lumière, que l'on découvre, d'après les lois des orbites newtoniennes, les éléments des orbites elliptiques. Simplifiant les calculs d'une manière qui mérite peut-être revision, W. de Sitter montre combien la trajectoire observée s'écarterait, d'après la théorie de Ritz, dans la plupart des cas, de toute ellipse newtonienne. L'incertitude des observations ne laisse entre les deux vitesses qu'une dépendance possible qui s'exprime par une fraction extrêmement petite de la vitesse de la source.

Les arguments de l'astronome hollandais n'ont pas convaincu tout le monde (1) : une participation de la vitesse de l'étoile à la vitesse de la lumière émise n'aurait d'autre conséquence, sur une trajectoire circulaire, que de la transformer, en première approximation, dans une ellipse newtonienne dont le grand axe serait dirigé vers l'observateur. Pour une trajectoire vraie elliptique, il n'y aurait, à la même approximation, que changement d'excentricité et diminution de l'angle que fait le grand axe de l'orbite avec la droite étoile-Terre. Or pareille préférence dans l'orientation des grands axes semble se manifester. La question, traitée anciennement (2), a été reprise en 1923 par R. Kou-

typo Mira Ceti secondo l'ipotesi balistica sulla velocita di propagazione della luce, ATTI DELLA R. ACCAD. NAZ. DEI LINCEI, CL. DELLE SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE... RENDICONTI, 5me série, t. 33 (1924, 1), p. 3.

(1) P. Guthnick, *Astronomische Kriterien für die Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Bewegung der Lichtquelle*, A. N., t. 195 (1913), nº 4670. — E. Freundlich, *Zur Frage der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*, PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT, t. 14 (1913), p. 835.

(2) J. Miller Bar, *The orbits and velocity-curves of spectroscopic binaries*, JOURNAL OF THE R. ASTRON. SOC. OF CANADA, t. 2 (1908), p. 70, 78. — H. Ludendorff, *Zur Statistik der Spectroskopischen Doppelsterne*, A. N., t. 184 (1910), nº 4415-16.

nitzky Moscou (1) qui trouve des coïncidences inexplicables par les faits connus. Cette plus grande fréquence de la direction de ces axes vers le système solaire doit trouver une interprétation où notre système solaire n'intervienne pas comme tel, et si cette interprétation est cherchée dans la Cosmogonie, il y a grand danger qu'on tombe dans l'arbitraire le plus complet. Il faudrait une étude nouvelle, plus complète et appuyée sur le Calcul des probabilités. L'argument suivant, présenté par W. de Sitter, devrait y être examiné : les binaires spectroscopiques, donc à grande vitesse propre, ont généralement des orbites quasi circulaires, tandis que les binaires à longue période ont généralement des trajectoires très allongées ; l'influence de la vitesse de la source sur la vitesse de la lumière produirait l'effet contraire.

D'autre part, l'interprétation classique des phénomènes ne permet pas de comprendre qu'il puisse y avoir plusieurs milieux, en mouvement les uns vis-à-vis des autres, par rapport à chacun desquels la lumière se propagerait en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions. Ce milieu unique, c'est l'éther des physiciens (2). On sait le trouble qu'est venue apporter à cette conception classique la célèbre expérience de Michelson. — Les phénomènes d'aberration et les calculs confirmés par l'observation démontrent que cet éther, s'il existe, n'est pas entraîné par la Terre, dans le mouvement de cette planète par rapport aux axes des physiciens, tandis que l'expérience de Michelson, préparée pour déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, pour faire sentir le « vent d'éther », et sûrement

(1) R. Kounitzky, *Les systèmes binaires stellaires considérés comme matériel expérimental pour la résolution de la question relative à la constance de la vitesse de propagation de la lumière*, A. N., t. 218 (1923), n° 5221. — Rapprocher de : J. Hellerich, *Ueber die Verteilung der Periastronlange der spektroskopischen Doppelsterne*, A. N., t. 219 (1923), n° 5253.

(2) E. Mascart, *Modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source et de l'observateur* (Annales de l'École normale supérieure, 1872, p. 157, et 1874, p. 363); à propos de ce mémoire ancien : A. Leduc, *Les phénomènes de diffraction et le mouvement de la Terre*, C. R., t. 160 (1915, 1), p. 316. — H. A. Lorentz, *De l'influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes lumineux*, Archives néerlandaises, 1re série, t. 21 (1887), p. 103.

assez sensible pour que ce déplacement relatif se manifeste, — l'expérience de Michelson, et toutes les expériences analogues (1) n'ont jamais donné qu'un résultat négatif. C'est ce qui a conduit Fitz-Gerald et H. Lorentz à l'hypothèse d'une contraction des corps dans le sens du mouvement par rapport à l'éther, contraction qui, dans les instruments d'expérience et d'observation, masquerait précisément la variation de la vitesse de la lumière suivant le sens dans lequel l'instrument est orienté vis-à-vis de son déplacement dans l'éther. C'est ce même insuccès de l'expérience de Michelson et des expériences analogues qui a conduit A. Einstein à l'hypothèse, incompatible avec la Physique classique, d'une vitesse de la lumière indépendante des divers axes de repère en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres. D'après cette hypothèse les axes par rapport auxquels la lumière se meut en ligne droite et avec la même vitesse dans toutes les directions posséderaient, comme les axes des principes de la Mécanique newtonienne, une indétermination cinématique.

L'incompatibilité de cette hypothèse avec les principes qui semblaient les mieux assurés, incompatibilité qui se manifeste dans des conséquences au moins étranges comme l'inexistence d'un temps absolu, indépendant du mouvement relatif des horloges qui le mesurent, a ému bien des physiciens, et l'interprétation de l'expérience de Michelson, qui remonte à 1887, est restée en discussion jusqu'aujourd'hui.

Avant d'examiner les objections récentes qui ont été faites à son interprétation relativiste, il faut présenter une observation.

(1) On trouvera dans le *Traité de Physique* de O. Chwolson (t. 5) la liste des expériences poursuivant le même but que celle de Michelson. — Citons l'expérience de F. Trouton et H. Noble (PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, série A, t. 202, 1903, p. 165) dans laquelle un condensateur plan chargé électriquement et suspendu à un fil de tension conserve une direction d'équilibre invariable quand la direction du mouvement de translation de la Terre se déplace par rapport au plan vertical des plateaux ; la théorie classique, au contraire, prévoit que le condensateur doit s'orienter avec ses plateaux parallèles au mouvement. — R. Tomaschek vient de répéter l'expérience de Michelson avec la lumière des étoiles ; résultat toujours nul : *Ueber den Michelsonversuch mit Fixsternlicht*, A. N., t. 219 (1923), n° 5251.

La constance de la vitesse de la lumière, et par conséquent l'indétermination cinématique des axes des physiciens, n'est pas en contradiction avec les principes de la dynamique classique : pratiquement, les systèmes d'axes des principes de la Mécanique sont confondus avec les systèmes d'axes du mouvement rectiligne et uniforme de la lumière, et toute une Mécanique peut s'édifier qui introduise l'invariance de la vitesse de la lumière et respecte, en particulier, le principe de l'inertie.— C'est la Relativité restreinte. Mais les quelques faits que n'explique pas très bien la Mécanique classique ne sont pas beaucoup mieux expliqués par la Relativité restreinte, et celle-ci n'a été qu'une étape de la Mécanique relativiste évoluant vers la Relativité générale ou Relativité dynamique d'aujourd'hui. Cette dernière abandonne les principes de la Mécanique classique, et ne les retrouve que dans un cas particulier limite, dont il n'est même pas certain qu'on puisse, de la manière dont l'univers est construit, se rapprocher autant que l'on veut. Ainsi, ce n'est qu'à une certaine approximation que l'invariance de la vitesse de la lumière peut servir à juger la Mécanique relativiste dans son développement d'aujourd'hui, et la grandeur de cette approximation dépend des circonstances matérielles de l'expérience en discussion. — Il resterait à examiner, cependant, si on peut conclure avec certains relativistes que la théorie nouvelle est devenue tout à fait indépendante du résultat de l'expérience de Michelson, de la même manière, à peu près, que la rotation de la Terre n'a pas cessé d'être certaine, quelque mauvais qu'eussent été reconnus les arguments de Galilée (1).

Les adversaires les plus récents de l'explication relativiste de l'expérience de Michelson sont J. Boussinesq, A. Righi et E. Brylinski.

Les effets par lesquels, d'après la Physique classique, doit se manifester le déplacement de l'observateur terrestre

(1) Premières lignes de *Durée et Simultanéité*, par H. Bergson (1923) : « La théorie de la Relativité, même restreinte, n'est pas précisément fondée sur l'expérience Michelson-Morley, puisqu'elle exprime d'une manière générale la nécessité de conserver aux lois de l'électro-magnétisme une forme invariable quand on passe d'un système de référence à un autre ».

vis-à-vis de l'éther se calculent au moyen de formules dans lesquelles entre, nécessairement, le rapport de la vitesse de l'observateur à la vitesse de la lumière. Ce rapport est extrêmement petit, de l'ordre du 1/10.000. Aussi, écrites de manière à renfermer les puissances successives de cette fraction, les formules peuvent-elles se simplifier par la suppression des termes qui renferment ces puissances, à partir de tel exposant. L'expérience de Michelson a pour objet de déceler un effet dont l'expression disparaîtrait des formules si on négligeait les termes de l'ordre de $(1/10.000)^2$: c'est une expérience du second ordre (1). D'après J. Bous-

(1) L'aberration astronomique est un phénomène du premier ordre, qui se mesure au moyen du rapport, tel quel, des deux vitesses. Les expériences de Fizeau et de Sagnac sont du premier ordre. — L'expérience de Fizeau porte sur la manière dont se propage la lumière dans la matière en mouvement, dans de l'eau circulant avec une vitesse connue à l'intérieur d'un tube : H. Fizeau, *Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur*, C. R., t. 33 (1851, 2), p. 349. La modification que subit la vitesse de la lumière s'exprime au moyen de l'indice de réfraction du milieu mobile d'une manière que Fresnel avait prédite trente ans auparavant. En 1886, Michelson et Morley ont appliqué aux mêmes recherches leur interféromètre et ont retrouvé, avec une grande précision, la concordance constatée par Fizeau : *Influence of motion of the medium on the velocity of light*, AMERICAN JOURNAL OF SCIENCE, 3me série, t. 31 (1886), p. 377. Ces travaux ont été effectués au moyen de la lumière blanche, que Michelson et Morley comparaient dans leurs calculs, quant à la longueur d'onde efficace, avec la lumière du sodium. P. Zeemann a repris récemment (1915) l'expérience de Fizeau avec diverses lumières monochromatiques : *L'expérience de Fizeau pour différentes couleurs du spectre*, C. R., t. 161 (1915, 2), p. 526, et *Mesure directe de la vitesse de l'eau dans l'expérience de Fizeau*, Id., t. 163 (1916, 2), p. 235. Zeemann a rapproché ses résultats à la fois de la formule de Fresnel et de la formule de Lorentz, légèrement différente en ce qu'elle tient compte du changement de fréquence dû à l'effet Doppler. C'est avec la formule de Lorentz que la concordance est excellente. (La deuxième de ces notes de Zeemann est pleine d'intérêt pour les hydrauliciens.) — Dans l'expérience de Sagnac (1913), un interféromètre dans lequel la lumière accomplit un circuit fermé est monté, y compris la source lumineuse, sur une plate-forme horizontale animée d'un mouvement uniforme de rotation ; un dépla-

sinesq, les formules théoriques ne sont pas exactes à pareille approximation (1): les hypothèses sur lesquelles s'appuie leur démonstration n'ont pas, pour cela, un degré suffisant de certitude ; ces formules sont employées en dehors de leur domaine légitime, et il n'est pas étonnant, dès lors, que ne se produise pas le phénomène qu'elles prédisent.

Les premières critiques d'A. Righi datent de 1919 (2) ;

cement des franges d'interférence manifeste l'influence de la rotation sur le rayon lumineux : G. Sagnac, *Sur les interférences de deux faisceaux superposés en sens inverse le long d'un circuit optique de grandes dimensions*, C. R., t. 150 (1910, 1), p. 1302 ; *Interféromètre à faisceaux lumineux superposés inverses...*, Ibid., p. 1676 ; *Strioscopes interférentiels et interféromètres simplifiés à circuits inverses...* Id., t. 156 (1913, 1), p. 1838.. *Un interféromètre en rotation uniforme*, Id., t. 157 (1913, 2), p. 708.

(1) J. Boussinesq, *Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences*, t. 3 (1921), p. 92 ; et dans C. R., t. 135 (1902, 2) : *Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'une translation rapide*, p. 220, 269, 309.—Voir aussi: J. Le Roux, *Interférence et réflexion dans un système mobile*, C. R., t. 173 (1921, 2), p. 1343.

(2) A. Righi : *L'expérience de Michelson et son interprétation*, C. R., t. 168 (1919, 1), p. 837 ; *Sur les bases expérimentales de la théorie de la relativité*, Id., t. 170 (1920, 1), p. 497 ; *Sur la relativité et un projet d'expérience décisive*, Id., mm. vol., p. 1550. Des articles plus développés paraissaient en même temps dans des périodiques italiens : dans les MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE BOLOGNE, t. 7 (1920), p. 3, *Sulle basi sperimentali della teoria della Relativita*, — ibid., p. 17, *Sulla teoria della Relativita e sopra un progetto di esperienza decisiva per la necessita di ammetterla*. — J. Villey a entrepris l'examen des critiques de Righi et les trouve en défaut : *Sur la discussion de l'expérience de Michelson*, C. R., t. 171 (1920, 1), p. 1175 ; *Sur l'application de la méthode de Righi à la discussion de l'expérience de Michelson*, C. R., t. 171 (1920, 2), p. 298. [Sur la vie et les travaux de A. Righi, voir le discours prononcé par Q. Majorana à l'Académie de Turin (ATTI DELLA REALE ACCAD. DELLE SCIENZE DI TORINO, t. 57, 1921-1922, p. 106].— La mort du physicien italien a arrêté cet échange de vues. Pour faire connaître l'esprit dans lequel se faisait celui-ci, il est nécessaire de signaler la déférence avec laquelle Righi parlait de la théorie de la Relativité : « Évidemment, si l'on ne s'était pas trompé sur la fausse prévision, on n'aurait pas eu à chercher les causes du prétendu désaccord, et personne n'aurait peut-être songé encore, ni à l'hypothèse de la contraction des corps dans le sens de leur mouvement dans l'éther, ni aux conceptions nouvelles sur la mesure de l'espace et du temps. Mais comme à côté de l'expérience de

d'après lui l'interprétation de l'expérience de Michelson, telle qu'elle a été faite par son auteur, comporte une erreur : une quantité petite du second ordre, comme $(1/10.000)^2$, y serait négligée, tandis que le phénomène attendu dépend des termes de cet ordre de grandeur ; deux faisceaux lumineux considérés comme parallèles ne le seraient pas en réalité, et le calcul montrerait que c'est précisément cette erreur qui fait naître la prédiction du phénomène attendu ; en d'autres termes, l'expérience de Michelson ne serait même pas une expérience du second ordre : elle serait du troisième ordre et le déplacement de la Terre par rapport à l'éther ne pourrait s'y manifester que par des termes de l'ordre de $(1/10.000)^3$, sensibilité à laquelle il n'est pas possible de prétendre.

Les recherches de E. Brylinsky sont plus récentes (1) ;

Michelson, il y en a d'autres, optiques ou électromagnétiques, qui indiquent, elles aussi, l'existence d'un désaccord, il ne faut pas se hâter à des conclusions trop tranchées, bien que ces dernières expériences ne paraissent avoir une valeur aussi grande que celle attribuée jusqu'ici à celle de l'éminent physicien américain. En tout cas, et je tiens à le déclarer, [ce qui va suivre s'adresse à la Relativité générale] même si un jour on arrivait à être sûr que la théorie d'Einstein n'est pas rendue nécessaire par des faits bien démontrés, rien n'empêcherait peut-être de l'admettre comme un instrument de recherche précieux, qui a déjà conduit, grâce au puissant génie de son auteur et de ceux qui l'ont suivi, à des résultats admirables, tels que l'existence de liens entre lumière et gravitation, que la théorie électrique de la constitution de la matière faisait seulement soupçonner... Même en reconnaissant ce que la science doit déjà à la théorie de la relativité, et en lui tributant toute l'admiration dont elle est digne, on peut désirer vivement que ces questions d'ordre expérimental soient élucidées, d'autant plus que la nouvelle conception peut se passer des expériences de laboratoire, si vraiment des observations astronomiques en fournissent d'éclatantes confirmations ».

(1) *Sur l'interprétation de l'expérience de Michelson*, C. R., t. 174 (1922, 1), p. 153 ; *Sur l'expérience de Michelson*, Id., t. 177 (1923, 2), p. 874 ; *L'expérience de Michelson et la contraction de Lorentz*, Ibid., p. 1023. — La discussion continue actuellement : A Metz, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 314 ; E. Brylinski, *Sur l'interprétation de l'expérience de Michelson*, Ibid., p. 466 ; A. Metz, *Au sujet de l'interprétation de l'expérience de Michelson*, Ibid., p. 1265 ; E. Brylinski, *Sur l'expérience de Michelson*, Ibid., p. 1366.

elles devraient être examinées de près : les formules qu'elles obtiennent prédisent un phénomène que devrait déceler l'expérience de Michelson, mais ce phénomène n'est pas celui sur lequel on a toujours compté ; une influence inégale du déplacement dans l'éther sur les dimensions des diverses pièces de l'appareil ne serait pas, pour expliquer le résultat négatif de l'expérience, la contraction longitudinale de Lorentz.

Mais une note de quelques lignes est passée presque inaperçue dans laquelle Dayton C. Miller déclare, ayant repris avec des précautions nouvelles la célèbre expérience, avoir obtenu un résultat positif, bien moindre, il est vrai, que celui qu'attendait Michelson (1). L'interféromètre utilisé à Cleveland en 1904 et qui ménage à la lumière un parcours de 224 pieds a été remonté à l'observatoire de Mount-Wilson. Les essais ont eu lieu d'avril à décembre 1921, et un petit déplacement des franges d'interférence s'est manifesté, dans le sens qu'indiquait le courant d'éther par rapport au laboratoire ; cependant l'amplitude de ce déplacement n'était que la dixième partie de ce qu'aurait dû donner l'indépendance complète de l'éther par rapport aux corps qui s'y trouvent en mouvement (2).

Les expérimentateurs ont poussé le scrupule jusqu'à chercher s'il ne pouvait s'agir d'une influence magnétique : dans une série d'expériences l'appareil reposait sur un socle de béton, sur une base d'acier dans une autre série. Le phénomène s'est manifesté de la même manière, déplacement périodique, dans le sens attendu, à chaque demi-révolution de l'interféromètre : mais ce déplacement subit lui-même une perturbation que rien n'explique, et dont la période est la révolution complète de l'interféromètre.

Ceci demande de nouvelles recherches ; aussi les adversaires de la Relativité n'invoquent-ils guère encore les expériences américaines, et se maintiennent-ils en présence du

(1) Dayton C. Miller, *Ether-Drift experiments at Mount-Wilson solar Observatory*, PHYSICAL REVIEW, t. 19 (1922, 1), p. 407.

(2) E. Brylinski a tenté de rendre ce petit déplacement compatible avec l'indépendance complète de l'éther et de la Terre en mouvement : *Sur la précision de l'expérience de Michelson*, C. R., t. 177 (1923, 2), p. 1209.

problème suivant : l'aberration astronomique témoigne de l'indépendance de la Terre et de l'éther ; d'autre part, dans l'appareil de Michelson et les appareils construits dans le même but, les choses se passent comme s'il n'y avait aucun mouvement relatif de la Terre et de l'éther ; comment concilier ces résultats contradictoires ? (1)

Einstein les a conciliés par une théorie nouvelle de la lumière, rebelle aux conceptions qui semblaient les mieux assurées, et qui, niant l'éther, supprimait la difficulté (2). Ses adversaires les concilient et les concilieront, dans le

(1) Une autre tactique a été d'imaginer des expériences nouvelles qui réussiraient mieux que l'expérience de Michelson. Voici quelques tentatives peu connues. Wien et Schweitzer ont proposé de comparer les vitesses de propagation de la lumière dans des sens opposés, d'une roue dentée à une autre roue éloignée et animée d'un mouvement synchrone, de même phase au même instant général : PHYSIKALISCHE ZEITSCHRFT, (1904). M. Brillouin a démontré l'inanité de cette proposition : *Le mouvement de la Terre et la vitesse de la lumière*, C. R., t. 140 (1905, 1), p. 1674. — De même, Giuganino, *Action de la translation terrestre sur les phénomènes lumineux*, C. R., t. 152 (1911, 1), pp. 1662, 1829 ; à quoi Sagnac a répondu : *La translation de la Terre et les phénomènes lumineux, Quelques paradoxes au sujet des actions optiques de premier ordre de la translation de la Terre*, Ibid., p. 1835 et vol. suivant, p. 243. — G. Sagnac lui-même, dans l'article *Les deux mécaniques simultanées et leurs liaisons réelles* [C. R., t. 171 (1920, 2), p. 99] : « ... Si l'analogie supposée par la théorie électromagnétique est assez profonde entre la lumière et les ondes électriques, la T.S.F. et la propagation le long des fils métalliques d'un signal amorti doivent permettre, dans l'état actuel des techniques [récepteurs redresseurs d'onde, cohéreurs, désaimantation des aiguilles de Rutherford...], de révéler les variations de forme ondulatoire. La recherche expérimentale d'un effet ondulatoire de la translation de la Terre est donc redevenue un problème actuel, et il est remarquable qu'elle mette en discussion simultanément la Mécanique classique et la théorie électromagnétique de la lumière ». Enfin, C. Raveau : *Démonstration de la loi de l'entraînement de l'éther de Fresnel, sans appel à la relativité du temps et de l'espace*, C. R., t. 175 (1922, 2), p. 613, et *La loi d'entraînement de l'éther de Fresnel*, Ibid., p. 947 ; à propos de quoi : C. Menges, *Sur le coefficient de Fresnel*, Ibid., p. 574.

(2) A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, ANN. DER PHYSIK, 4e série. t. 17 (1905), p. 903.

cadre de la Physique traditionnelle, par des théories nouvelles de la lumière, et chacun, à peu près, aura la sienne.

Nous avons eu la théorie de G. Sagnac pour laquelle l'expérience de Michelson garde toute sa valeur démonstrative de l'invariance de la vitesse de la lumière, mais qui maintient le temps absolu et l'existence de l'éther « support nécessaire des ondes lumineuses de Huyghens et de Fresnel » (1).

(1) Une étude approfondie de la théorie de Sagnac devrait remonter à l'étude que fit jadis ce physicien de l'entraînement de la lumière par la matière à propos de l'expérience de Fizeau. Tous les articles signalés ci-dessous ont paru aux C. R. : à chaque groupe de ces articles correspond généralement un mémoire plus étendu inséré dans une autre publication, ordinairement dans le JOURNAL DE PHYSIQUE. — *Nouvelle manière de considérer la propagation des vibrations lumineuses à travers la matière*, t. 129 (1899, 2), p. 756 ; *Théorie nouvelle des phénomènes optiques d'entraînement de l'éther par la matière*, Ibid., p. 818 ; *Sur la propagation de la lumière dans un système en translation et sur l'aberration des étoiles*, t. 141 (1905, 2), p. 1220 ; *Les systèmes optiques en mouvement et la translation de la terre*, t. 152 (1911, 1), p. 310 (480) ; *Éther et mécanique absolue des radiations*, t. 169 (1919, 2), p. 469 ; *Mécanique absolue des radiations et relativité newtonienne*, Ibid., p. 643 ; *La relativité réelle de l'énergie des éléments de radiation et le mouvement dans l'éther des ondes*, t. 170 (1920, 1), p. 1239 ; *Les deux mécaniques simultanées et leurs liaisons réelles*, t. 171 (1920, 2), p. 99. — G. Sagnac a interprété suivant la Physique traditionnelle sa belle expérience de l'interféromètre en rotation : *L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif dans un interféromètre en rotation uniforme*, t. 157 (1913, 2), p. 708 : « Une rotation uniforme dextrorsum de l'interféromètre produit un vent d'éther sinistrorsum et inversement ;... l'effet interférentiel observé est bien l'effet tourbillonnaire optique dû au mouvement du système par rapport à l'éther... » Cette expérience, du premier ordre, est l'une de celles qu'interprètent également bien toutes les théories optiques ; les manuels de Relativité l'expliquent généralement dès leurs premières pages par la Relativité restreinte ; P. Langevin a publié l'explication du phénomène en Relativité générale : *Sur la théorie de la relativité et l'expérience de M. Sagnac*, C. R., t. 173 (1921, 2), p. 813. Il y voit l' « influence sur la propagation de la lumière du champ de gravitation particulier aux observateurs liés à la plate-forme en rotation, le même champ qui se manifeste mécaniquement par les effets de force centrifuge ou gyroscopiques ; cette expérience optique du premier ordre s'apparente ainsi à l'expérience du pendule de Foucault ou à celle du gyroscope et manifeste une fois de plus depuis Newton la *possibilité de mettre en évidence le mouvement de rotation d'un système matériel par des expériences intérieures au système* » (l'original n'est pas souligné).

« La géométrie euclidienne et la relativité réelle de la dynamique newtonienne sont admises comme rigoureuses ; — la relativité de la radiation est une loi purement extérieure (une loi statistique), limitée aux effets de l'énergie moyenne ou totale de radiation, sur nos sens ou sur des récepteurs incapables de nous révéler la structure ondulatoire absolue et intérieure de la radiation ; — la relativité extérieure de la radiation est supposée semblable à la relativité newtonienne de la matière. » — En d'autres termes, ce n'est qu'en gros qu'il y a relativité newtonienne de l'énergie totale : « flux lumineux d'aspect continu, superposition réelle d'un nombre considérable d'éléments sinusoïdaux de diverses fréquences » qui se totalisent de manière à rendre « le champ de radiation indépendant de la translation rectiligne et uniforme. — C'est donc à la Mécanique classique qu'appartient de nouveau la puissance de recherche du *réel caché*. (1) »

Nous venons d'avoir la théorie de P. Lenard, d'après laquelle il existerait deux éthers (2) : l'un dont seraient comme imbibés les corps et qui s'étendrait de quelque manière en dehors de leurs surfaces limites ; l'autre, universel et qui constituerait le milieu de propagation rectiligne et uniforme de la lumière ; dans l'aberration astronomique n'interviendrait sensiblement que l'éther universel ; dans l'expérience de Michelson et les recherches analogues, effectuées au voisinage de la Terre, la vitesse de la lumière serait déterminée par le seul éther terrestre.

(1) Ces derniers mots caractérisent très bien la distinction intellectuelle la plus nette entre les deux Mécaniques : pour la Mécanique relativiste le *réel caché* n'existe pas : elle est essentiellement basée sur le principe de l'*identité des indiscernables*.

(2) P. Lenard, ***Fragen der Lichtgeschwindigkeit***, A. N., t. 213 (1921), n° 5107. Dans le même esprit : K. Vogtherr, *Ueber Aberration und Michelsonsversuch*, A. N., t. 217 (1922), n° 5203. — Il faut rapprocher de la théorie de Lenard, l'expérience récente de Tomasheck, citée ci-dessus, tentative de Michelson avec la lumière des étoiles.

LE DÉPLACEMENT DU PÉRIHÉLIE DE MERCURE

—

É. Picard a excellemment caractérisé la Relativité en disant qu'elle est une géométrisation de la Mécanique (1). — A la surface de la Terre, un point est déterminé par deux nombres, deux coordonnées, pour lesquelles on adopte généralement la longitude et la latitude. La connaissance de la forme et de la grandeur de la Terre équivaut à la connaissance de la manière dont tout arc allant d'un point à un autre de la surface terrestre s'exprime au moyen des coordonnées des points extrêmes et de la relation qui existe entre es coordonnées d'un point quelconque de la courbe suivie. — De même, dans l'espace-temps, un événement est déterminé par quatre nombres, dont (par exemple) trois fixeront le siège géométrique de l'événement, et le quatrième l'instant où celui-ci se produit. La connaissance de la structure de l'espace-temps, pour la prévision des événements dont il sera le cadre, équivaut à la connaissance d'une expression analogue à celle de tout arc de la surface terrestre, et qui s'écrit au moyen de valeurs que prennent, non plus deux, mais quatre quantités, les coordonnées de l'événement. — Cette structure connue, un principe de la Mécanique relativiste, transposition, au fond, du principe classique de l'inertie, permet de déterminer, dans l'espace et dans le temps, la succession continue des événements dont l'ensemble constitue l'histoire d'un point matériel abandonné à lui-même dans telles conditions initiales : si le mot *force* est encore employé, ce n'est plus que par analogie, et la notion classique correspondante ne se présente pas (2).

Lorsque la structure de l'espace-temps consiste dans celle d'un champ de gravitation symétrique autour d'un point matériel, l'expression générale caractéristique de ce champ est bien connue, et c'est elle qui doit être appliquée,

(1) É. Picard, *La théorie de la Relativité et ses applications à l'Astronomie*, ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR 1922.

(2) A. Eddington, *La gravitation peut-elle être expliquée ?* SCIENTIA, t. 33 (1923, 1), p. 313 (p. 51 du supplément).

dans le problème relativiste des deux corps, à la détermination de la trajectoire d'une planète par rapport au Soleil. Les axes de repère sont choisis de façon que le principe classique de l'inertie soit d'autant plus proche d'être vérifié par un point matériel que ce point serait plus éloigné du centre de symétrie du champ : l'excellente approximation de la Mécanique newtonienne montre que ces axes de repère sont pratiquement solidaires de l'ensemble, censé invariable, des étoiles (1).

La trajectoire planétaire obtenue est une courbe plane constituée d'une infinité de spires le long de chacune desquelles la planète passe par un maximum invariable et par un minimum invariable de distance au Soleil : les points de passage à ces extrema sont donc distribués le long de deux circonférences centrées sur le Soleil, et ayant pour rayons ce maximum et ce minimum de distance. En somme, la trajectoire totale consiste dans une série d'arcs passant tangentiellement de l'une à l'autre de ces circonférences (2). — A une approximation satisfaisante, cette trajectoire peut être considérée comme une ellipse dont le Soleil occupe

(1) Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les quatre coordonnées d'un événement, la structure du champ de gravitation est définie par l'expression ds^2 du carré de l'*intervalle* élémentaire ds en fonction des accroissements dx_1, dx, dx_{32}, dx_4. Cette expression est nécessairement homogène et du second degré suivant ces accroissements, de sorte qu'elle renferme dix termes dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées $(x_1, \ldots x_4)$ caractéristiques du champ de gravitation : ce sont les dix potentiels de ce champ. — L'expression de ds^2 adoptée par la Mécanique relativiste est due à Schwarzschild : SITZUNGSBER. DER PREUSS. AKAD. DER WISS., t. 7 (1916), p. 189. Elle a d'abord été présentée comme une expression à essayer, et dont l'essai s'est montré satisfaisant ; H. Janne vient de montrer que le ds^2 du champ de gravitation à symétrie sphérique doit effectivement avoir la forme proposée : *Méthode directe pour obtenir le ds^2 de Schwarzschild*, ACAD. R. DE BELGIQUE, BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES, 2e série, t. 4 (1923), p. 484.

(2) Ce mouvement d'oscillation de l'une à l'autrede deux circonférences centrées sur le Soleil aurait peut-être donné quelque satisfaction à la Géométrie des anciens, à qui aurait probablement répugné la dissymétrie de l'ellipse newtonnienne par rapport au Soleil. — Une remarque analogue a été faite par L.-G. Du Pasquier, *Le principe de la Relativité et les théories d'Einstein* (Paris, 1922), p. 397.

un foyer et qui, pendant que la planète la parcourt conformément à la loi des aires, tourne autour du Soleil d'un mouvement uniforme. C'est, à cette rotation près, le mouvement képlérien, tel que le retrouve la Mécanique newtonienne (1). — Or cette rotation est d'autant plus rapide que moindre est la distance moyenne de la planète au Soleil et que plus grande est l'excentricité de l'ellipse newtonienne. Aussi la planète Mercure est-elle celle pour laquelle cette rotation est la plus forte, et la seule pour laquelle cette rotation puisse être appréciée. — Le calcul lui donne une valeur de 43" par siècle, et on sait que, précisément, le périhélie de Mercure manifeste une rotation séculaire, dans le sens indiqué, d'une quarantaine de secondes en excès sur ce que justifient les perturbations dues aux autres planètes : d'où les revendications des relativistes qui considèrent cette coïncidence comme une confirmation expérimentale de la Mécanique nouvelle (2).

(1) Il y a probablement des objections sérieuses (et fécondes) à opposer à divers points de la Physique nouvelle (qui est une Physique naissante), mais il est bon de faire voir (encore que ce soit par une sorte de cas extrême) le genre d'objection qui se rencontre parfois. Il s'agit d'un *défi* affiché par son auteur, S. Christesco, à l'Exposition de Physique de Paris en 1923, etre produit dans plusieurs ouvrages ; il se compose de 34 objections. Voici l'objection relative au déplacement des périhélies. — 18. — « Dans la formule sur le déplacement des périhélies de la planète Mercure, Einstein admet les facteurs suivants : la constance des grands axes des orbites des planètes et l'excentricité de l'ellipse. — *a)* Il se trouve donc dans la catégorie du système Kepler-Newton-Laplace qu'il veut bouleverser. — *b)* La courbe exprimée par sa formule étant plane, le déplacement qui en résulte doit être considéré s'effectuer dans un plan et non pas dans l'espace ainsi qu'on a l'air de le présenter. — *c)* Par la constance de ces deux facteurs il résulterait que chaque année, au moment où ce phénomène doit se produire, la planète Mercure devrait passer d'un mouvement elliptique à un mouvement circulaire, pour revenir, à nouveau, à un mouvement elliptique, ce qui est absurde ». *Les ondes fluorescentes dans le substratum de la matière*, Paris, Alcan, 1924, p. 57. — Et puisque Einstein et ses partisans « se sont esquivés de la discussion publique » à laquelle l'auteur les convie depuis un an, ils « n'ont plus qu'à répondre à toutes ces interrogations »!!

(2) Pour les précisions et la réponse à diverses objections, en particulier sur la légitimité de ce rapprochement entre la solution

L'actualité relativiste n'a fait que donner un regain d'intérêt à cette anomalie du mouvement de Mercure, mais les mécaniciens célestes n'avaient pas laissé de s'en préoccuper. Après le succès de Leverrier dans sa recherche d'une planète inconnue provoquant les anomalies du mouvement d'Uranus, on ne manqua pas d'attribuer à une autre planète inconnue les anomalies du mouvement de Mercure ; un peu prématurément on alla jusqu'à lui donner un nom, et je possède un cours manuscrit d'Astronomie, qui doit dater des environs de 1875, et dans lequel la liste des planètes « connues » débute tranquillement de la manière suivante : Vulcain, Mercure,...

Lorsqu'on eut renoncé à découvrir la planète perturbatrice, lors de ses passages sur le Soleil, on songea à une modification de la loi d'attraction newtonienne ou à l'intervention de forces supplémentaires de nature électromagnétique (Gauss, Weber, Riemann) : ces tentatives sont signalées dans le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand (1). Il y a

relativiste du problème des deux corps et la solution classique du problème des *n* corps, voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, R. Q. S., 4e série, t. 2 (1922, 2), p. 184 (p. 17 du tiré-à-part). — Je me permets de penser que cette réponse est applicable aux objections de J. Le Roux, *Sur la gravitation dans la mécanique classique et dans la théorie d'Einstein*, C. R., t. 175 (1922, 2), p. 809. — Voir aussi les réponses de M. Brilloin (*Gravitation einsteinienne et gravitation newtonienne...* ; Ibid., p. 923) et de A. Buhl (*Sur le mouvement séculaire du périhélie de Mercure*, Ibid., p. 1040), ainsi que les nouvelles instances de J. Le Roux (*La Mécanique de Newton n'est pas une approximation de celle d'Einstein*, Ibid., p. 1395, — *Sur le champ de gravitation*, C. R., t. 176, p. 1544). — En ce qui concerne un commencement d'application de la Mécanique relativiste à un champ de gravitation plus compliqué que celui que définit le problème des deux corps, voir aux C. R., t. 176 (1923, 1) : *Sur le Problème des* n *corps* ou *le champ gravitationnel de* n *corps*, J. Haag, p. 163 et 1205, et H. Levinson, p. 981, — et au t. 177 du même recueil : J. Chazy, *Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la Relativité*, p. 303, 939.

(1) Aux chapitres 38 et 39 du tome IV de ce *Traité* (Paris, 1896) — Le dernier de ces chapitres « fait connaître les résultats de la grande enquête faite par Leverrier, continuée par Newcomb, pour confronter la loi de Newton avec l'ensemble des observations des planètes : tout marche avec un accord admirable, sauf une ou deux petites difficultés dont nos successeurs triompheront sans

lieu de citer ici, en vue de ce qui doit suivre, l'hypothèse d'A. Hall, d'après laquelle les corps s'attireraient en raison inverse d'une puissance de leur distance un peu différente de 2, à savoir 2,000 000 16 (1). — Des hypothèses plus récentes ont été signalées dans les numéros précédents de cette *Revue*. Ajoutons aujourd'hui (2) : les conséquences que tire Lodge de sa théorie électrique de la matière dans laquelle il existe une masse électromagnétique fonctionde la vitesse, et où, de plus, un mouvement de rotation de tout le système solaire coopère à l'explication des déplacements périhéliques (3) ; — l'hypothèse de G. Greenhill d'après laquelle, aussi, la masse de la planète serait une fonction convenable de la vitesse (4) ; — l'application que fait G. Burns

doute ». Ces difficultés sont les anomalies inexpliquées dans le déplacement du périhélie de Mercure, du périhélie de Mars, du nœud de Vénus, et dans le mouvement de la Lune. Ne faut-il pas ajouter aujourd'hui un petit désaccord dans la valeur de l'excentricité de l'orbite de Mercure, certaines perturbations du mouvement de la comète d'Encke (et de la comète de Halley) et, peut-être, du mouvement du plus intérieur des satellites de Jupiter ?

(1) A. Hall, *A suggestion in the theory of Mercury*, AN. J..., t. 14 (1894), p. 49.

(2) Sur ces diverses hypothèses et la discussion de leur capacité d'explication des anomalies observées, voir : F. Dyson, *Discussion on the theory of Relativity*, PR. R. S., t. 97 (1920), p. 74. — Dans sa réponse à l'hypothèse de Lodge (note suivante), A. Eddington conclut que toute théorie construite en vue de l'explication à l'anomalie du mouvement de Mercure l'est au moyen de constantes arbitraires dont on se réserve la détermination d'après l'anomalie observée : *On electrical theories of matter and their astronomical consequences with special reference to the principle of Relativity*, PH. M., t. 35 (1918), p. 481.

(3) Voir dans le PH. M. (1917 et 1918), la théorie de Lodge et la critique d'Eddington : O. Lodge, *Astronomical consequences of the electrical theory of matter*, t. 34, p. 81 ; A. Eddington, même titre, Id., p. 63, 321 ; O. Lodge, même titre, Id., p. 517 ; O. Lodge, *Continued discussion...* ; t. 35, p. 141. — Voir aussi G. Walker, *On Relativity and electrodynamics*, PH. M., t. 35, p. 327, et A. Eddington, article signalé à la note précédente.

(4) G. Greenhill, *Newton-Einstein planetary orbit*, PH. M., t. 41 (1921), p. 143. La fonction proposée est du quatrième degré et s'écrit au moyen de quatre constantes : le grand nombre de ces constantes augmente les chances de possibilité d'un ajustement avec les anomalies observées. — Il s'agit ici d'une variation empi-

d'un théorème oublié de Newton dans lequel celui-ci s'est inquiété, exactement comme les auteurs d'aujourd'hui, d'une loi de forces respectant la loi des aires et imprimant un mouvement de rotation au périhélie (1) ; — l'hypothèse de L. Lecornu appliquant à la planète, comme D. Berthelot

rique de la masse avec la vitesse. On sait d'autre part que dans le cas particulier extrême de la Relativité qui s'appelle la Relativité restreinte, là où peut se faire la transposition terme par terme de la Mécanique classique dans les conceptions nouvelles, la notion de masse ne se présente pas d'une manière indépendante de la vitesse, soit qu'on la considère (masse newtonienne) comme le rapport de la force à l'accélération, soit qu'on la considère (masse maupertuisienne) comme le rapport de l'impulsion à la vitesse. Dans le premier cas, il y a lieu de distinguer un facteur de proportionnalité de la composante de la force à la composante de l'accélération dans la direction de la vitesse (masse longitudinale), et un même facteur de proportionnalité dans les directions perpendiculaires (masse transversale); quant à la masse maupertuisienne, elle se confond avec la masse newtonienne transversale ; ayant au repos une valeur minimum, ces coefficients sont des fonctions du rapport de la vitesse du mobile à la vitesse de la lumière. — Ces notions, introduites par la Mécanique de l'électron, se retrouvent dans la Relativité restreinte, mais lui sont antérieures : voir H. Poincaré, *La Mécanique nouvelle ;* R. Dugas, *Sur le mouvement d'un point matériel de masse variable avec la force vive, soumis à une force centrale*, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 547. — En ce qui concerne la possibilité de la masse fonction de la vitesse, E. Pasquier a été l'un des premiers à l'envisager : *Cours de Mécanique analytique*, t. 1 (Louvain, 1901).

(1) G. Burns, *Relativity and the motion of perihelia*, JOURNAL OF THE BRIT. ASTRON. ASSOC., t. 33 (1922-1923), p. 102, 136. — Voir Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, section IX du livre I : *de motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum*, p. 121 de l'édition d'Amsterdam (1723), p. 138 de l'édition française, t. 1 (Paris, 1759). — Cette étude de Newton, dont il semble que Burns n'a pas tiré tout ce qu'il était possible, est extrêmement intéressante. Avant ce travail provoqué par la Relativité je ne trouve les recherches de Newton citées que dans l'ENCYCLOPÉDIE MATHÉMATIQUE (t. V, *Gravitation*, par J. Zenneck), et l'auteur semble les avoir interprétées comme l'examen des conséquences qu'aurait (ainsi que le voulait Hall) une modification à l'exposant 2 de la loi de l'attraction universelle. . . Voici l'énoncé de la proposition 44 de Newton : *Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in eodem orbe revolvente aequaliter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.*

(1916) une force perpendiculaire à la vitesse et montrant que ceci est compatible avec la déviation gravifique des rayons lumineux (1) ; — la gravitation semi-einsteinienne de P. Painlevé (2) ; — l'hypothèse de L. Décombe, forme nouvelle d'hypothèses anciennes, d'après laquelle la gravitation aurait une origine électrique (3).

Il faut s'arrêter plus longtemps aux travaux de J. Chazy (4). — Celui-ci décrit les composantes de l'accélération de la planète se mouvant suivant la trajectoire relativiste : les produits de la masse par ces composantes sont les composantes de la force selon laquelle, en Mécanique classique, la trajectoire serait la trajectoire relativiste. Lorsqu'on décompose celle-ci en un mouvement elliptique et une rotation, lente par hypothèse, de l'ellipse, on peut écrire les expressions d'un grand nombre de lois de forces qui assureront cette ellipse et cette rotation ; parmi ces forces possibles il existe plusieurs forces centrales ; on y retrouve celle qu'a prévue Newton et que Burns a rajeunie, avec un terme en raison inverse du cube de la distance. — Mais si toutes ces lois peuvent vérifier le déplacement périhélique, elles apportent des modifications différentes aux durées de révolution, et ceci va permettre de juger de leur acceptabilité. —

(1) *Quelques remarques sur la Relativité*, C. R., t. 174 (1922, 1), p. 337 ; *Sur l'orbite de Mercure*, Id., t. 176 (1923, 1), p. 204.

(2) *La théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation*, C. R., t. 174 (1924, 1), p. 1137. — Le but de ce mathématicien est de montrer que les vérifications astronomiques dont font état les relativistes sont aussi bien assurées dans d'autres théories parmi lesquelles il en est qui n'obligent pas à renoncer à la conceptic n euclidienne de la Géométrie.

(3) *Calcul direct du déplacement périhélique séculaire des planètes dans l'hypothèse où la gravitation est d'origine électrique, applicatio n à la planète Mercure*, C. R., t. 175 (1922, 2), p. 1194.

(4) Aux C. R., t. 176 (1923, 1) : *Sur l'expression de la loi d'Einstein en coordonnées cartésiennes*, p. 285 ; *Sur la correction apportée par la Relativité à la durée de révolution newtonienne des planètes* p. 656 ; *Sur les effets séculaires de la théorie de la Relativité dans les mouvements planétaires*, p. 1542. — En connexion, même vol. : L. Lecornu, *Sur la durée de révolution des planètes*, p. 795 ; J. Trousset, *L'observation des planètes peut-elle fournir des arguments pour ou contre la Relativité ?* p. 888. — Comparer avec : A. Eddington *Mathematical theory of Relativity* (Cambridge, 1922), p. 96.

Avec ces diverses corrections de la loi newtonienne, ainsi qu'avec celle que Hall a proposée, les durées de révolution devraient être modifiées de quantités de l'ordre de la seconde, difficilement compatibles avec la précision des observations actuelles et les variations qu'on peut introduire dans le système des constantes astronomiques. D'autre part, dans la théorie de la Relativité, les durées de révolution de Mercure, Vénus, la Terre et Mars ne subissent que des corrections de 0,25, 0,011, 0,031, 0,21 sec. : « sont-elles admissibles ? Il semble, conclut l'auteur, que l'étude des durées des révolutions sidérales puisse fournir bientôt un argument pour ou contre la théorie de la Relativité » (1).

Je ne pense pas qu'à l'occasion de son étude récente sur l'attraction newtonienne et le déplacement périhélique (2),

(1) Toutes choses égales, le déplacement du périhélie est en raison inverse du carré de la durée de révolution ; aussi les étoiles doubles spectroscopiques et les variables à courte période pourraient-elles fournir une nouvelle confirmation de la Relativité ; c'est ce qu'a exposé G. Schain dans les A. N. (t. 217 1922-1923, n° 5192) : *Die Anwendung der Relativitätstheorie auf die spektroskopischen Doppelsterne und die veränderlichen Sterne.* La période d'Algol, par exemple, est de 2,87 jours, à quoi correspondraient un déplacement périhélique de 3",7 par révolution ou de 7',5 par an, et, en dix ans, une variation de $4^{m}53^{s}$ dans la période de la courbe de lumière. Cette variation est bien observable mais peut être attribuée aussi à une rotation de l'orbite du compagnon due à un aplatissement convenable de l'astre principal : Tisserand a montré que, pour Algol, la variation observée de la période lumineuse s'explique par un aplatissement de 1/288. Néanmoins l'application de l'analyse harmonique à la courbe de lumière pourrait peut-être, pense l'auteur, y faire rencontrer une période due au déplacement relativiste du périhélie.

(2) E. Pasquier, *Sur une expression simple de l'accélération de Mercure dans le cas du problème des deux corps avec prise en considération du mouvement du périhélie de la planète*, C. R., t. 176 (1923, 1), p. 498. — Pour plus de détails, voir, du même auteur : *Sur une modification élémentaire de la gravitation newtonienne permettant de faire disparaître le désaccord de cette loi avec le déplacement du périhélie de Mercure*, ANNALES DE LA SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, t. 42 (1923), p. 329 ; et *Sur une modification élémentaire qu'on peut éventuellement appliquer à la gravitation newtonienne pour faire disparaître un désaccord qui pourrait exister entre cette loi et le déplacement du périhélie d'une planète quelconque*, Id., t. 43 (1924), p. 66.

il faille ranger É. Pasquier parmi ceux qui, par un coup de pouce à la Mécanique classique, veulent retarder le règne de la Mécanique relativiste. Son point de vue est celui du « mathématicien pur, pour qui l'essentiel est de trouver une formule qui fournisse des résultats conformes aux observations ». Sans doute faudrait-il, pour garder la forme des équations de la Mécanique classique, une intervention supplémentaire due aux diverses masses du système planétaire ; mais, dans l'impossibilité de déterminer la part d'intervention de chacune de ces masses, l'auteur attribue toute cette intervention à une rotation convenable, autour d'un axe passant par le centre du Soleil : à cette rotation correspond une accélération supplémentaire s'ajoutant géométriquement à l'accélération képlérienne, perpendiculaire à la direction de la vitesse et proportionnelle à celle-ci.

LA DÉVIATION GRAVIFIQUE DES RAYONS LUMINEUX

—

D'après la Physique relativiste l'énergie est pesante, ce qui signifie qu'un rayon lumineux aura, toutes autres choses égales, une trajectoire qui dépendra des caractéristiques du champ de gravitation en chacun de ses points (1). Un rayon lumineux rasant le globe solaire s'incurve de façon que ses deux parties pratiquement rectilignes, l'une à grande distance avant le passage près du Soleil, l'autre à grande distance après ce passage, font entre elles un angle de 1",745. Cette déflexion de la lumière ne peut se constater que pendant les éclipses totales de Soleil, sur la position apparente des étoiles aperçues dans le voisinage de l'astre : pour les rayons ne rasant pas le Soleil, la théorie prévoit un déplacement inversement proportionnel à la distance angulaire (pour l'observateur terrestre) de l'étoile au centre du Soleil.

(1) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1922, R. Q. S., 4e série, t. 4 (1923, 2), p. 266 (p. 44 du tiré-à-part).

L'éclipse de Soleil du 20 septembre 1922 a provoqué plusieurs expéditions scientifiques dont cette *Revue* a, l'an dernier, parlé avec quelque détail. A Wallal, en un point de la côte nord-est de l'Australie, s'est installée la mission de l'observatoire Lick (Université de Californie), sous la direction de W. Campbell et R. Trumpler. Le 13 avril 1923, le Bureau international des télégrammes astronomiques recevait et transmettait une dépêche de l'Observatoire Lick annonçant l'accord le plus exact entre les déviations observées et les déviations prédites par la Relativité. — On possède aujourd'hui des résultats plus complets (1).

L'éclipse de 1919 avait déjà fait l'objet des mêmes études (2): les observations y avaient généralement été favorables à la théorie nouvelle, mais quelques objections gardaient leur valeur. — N'y a-t-il pas, pendant l'observation photographique, distorsion dans les diverses parties de l'instrument ? — Lors du séchage de la plaque, n'y aura-t-il pas des zones qui se contracteront différemment, et ceci, d'après, précisément, l'intensité avec laquelle elles auront été impressionnées,

(1) W. Campbell et R. Trumpler, *Observations on the deflection of light in passing through the Sun's gravitational field made during the total solar eclipse of Sept.* 21, 1922, LICK OBSERVATORY BULLETIN, n° 346 (juillet 1923). — Dans une étude approfondie de la question, il y aura lieu de se rendre compte des procédés employés pour la réduction et la comparaison des clichés : on verra ainsi tout ce que de pareilles mesures ont de difficile et de délicat. Il faudra aussi rapprocher les méthodes des astronomes américains de celles qu'ont adoptées d'autres observateurs ; les M. N. [t. 84 (1923-1924), p. 150] renferment un article très détaillé sur les travaux de l'expédition de l'observatoire de Sidney dans l'Australie du Sud : G. Dodwell et C. Davidson, *Determination of the deflection of light...* Deux plaques ont été étudiées : le déplacement moyen ramené au bord du disque a été 2″,36 pour l'une, 1″,18 pour l'autre. — Un ciel couvert a fait échouer l'expédition anglaise des îles Christmas, sous la direction de H. Jones : OBS., t. 46 (1923), p. 164 ; la mission germano-hollandaise, au même endroit, eut le même sort : F. Finlay Freundlich, A. N., t. 218 (1922-1923), n° 5209. — La mission de l'observatoire de Sidney à Gondiwinski (Queensland) s'est également trouvée dans de mauvaises conditions : M. N., t. 83 (1922-1923), p. 511.

(2) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, R. Q. S., 4e série, t. 2 (1922, 2), p. 192 (p. 25 du tiré-à-part).

c'est-à-dire symétriquement tout autour du Soleil ? — L'abaissement de la température au moment de l'éclipse ne va-t-il pas causer dans l'atmosphère terrestre quelque réfraction irrégulière ? — De plus, il y a lieu d'écarter (ou de discerner quantitativement) les autres causes d'incurvation des rayons lumineux, à savoir : une réfraction dans l'atmosphère solaire qui pourrait être plus étendue qu'on le croit, — le phénomène encore inexpliqué de la *réfraction annuelle* qui consiste aussi en un déplacement apparent des étoiles, dans le sens du déplacement einsteinien, mais agissant encore à grande distance angulaire du Soleil (1).

Toutes ces causes d'erreur sont discutées par les astronomes américains ; elles sont écartées par l'organisation des observations, ou bien leurs effets sont mesurés et défalqués du résultat final. Une carte de la région stellaire occupée par le Soleil à l'instant de l'éclipse, avec, pour chacune des 92 étoiles du champ photographié, le déplacement observé, représenté en sens et en grandeur à une échelle convenable (2250 fois plus grande que l'échelle de la carte), schématise ce résultat. Les étoiles, à très peu d'exceptions

(1) La découverte, par L. Courvoisier, de la *réfraction annuelle* a été faite à l'occasion de la variation des latitudes, liée au déplacement du pôle à la surface de la Terre. Il existe une relation théorique entre le déplacement du pôle, la longitude du lieu, et un changement de latitude de ce lieu. Cette relation est mal satisfaite par les observations ; elle est mieux satisfaite lorsqu'on y introduit un terme empirique, indépendant de la longitude du lieu, variant avec le temps, et repassant par les mêmes valeurs à une année d'intervalle : c'est le terme dit de Kimura, et dont l'opportunité est de plus en plus contestée. L. Courvoisier expliqua la présence de ce terme par une erreur systématique des observations due à ce que les rayons des étoiles subiraient une déviation, symétriquement par rapport au Soleil. Le fait semble établi : à 31° du Soleil, Aldébaran (α Taureau) a montré un déplacement de o'',28 ; cette influence ne semble s'annuler qu'aux approches du plan perpendiculaire à la direction du Soleil. Dans le voisinage du Soleil, les observations se sont faites sur Vénus à l'époque de sa conjonction supérieure : à 4° de distance angulaire, on a cru observer un déplacement d'une seconde. — L'existence de la déviation gravifique annuelle complique l'observation, et il importe extrêmement de disjoindre ces deux influences. — Sur la réfraction annuelle : aux A. N., t. 167 (1905), nos 3990-91 et 4012, 4031 (Courvoisier), 4008 et 4024 (Pannekoek), 4025 (Harzer).

près, fuient nettement le Soleil, et d'autant moins qu'elles sont plus éloignées de celui-ci.

Quatre plaques ont été impressionnées, qui avaient déjà reçu, plusieurs mois auparavant, aux îles Tahiti, l'image de la même région du ciel. Les déplacements moyens observés ont été ramenés par le calcul à ce qu'ils auraient été pour un rayon lumineux rasant le disque solaire,

1″,80 1″,48 1″,85 1″,76

ce qui donne une moyenne finale de 1″,72, au lieu de 1″,74 annoncé par la théorie (1).

C'est à ce résultat, probablement, que faisait allusion le télégramme de 13 avril 1923. — Les astronomes ne s'en sont

(1) C'est à ce fait que le résultat satisfaisant pour la Relativité n'est qu'un résultat moyen que s'en prendront tous les adversaires de la Mécanique nouvelle. Cette considération des moyennes est cependant parfaitement conforme à la méthode habituelle de la Physique, et celle-ci se serait complètement paralysée si elle s'était interdit cet artifice. Il peut se faire, cependant, à la rigueur, que des circonstances mal connues créent des écarts de sens différents dont la moyenne semble confirmer telle ou telle vue théorique. Ceci démontre la nécessité de multiplier les observations. Ceci démontre encore le danger de se contenter, sans autre examen, des résultats moyens. Pour empêcher que naissent de fausses idées, pour nous préparer aussi à apprécier, tantôt, les objections des adversaires de la Relativité, il est utile d'extraire des tableaux du Lick Obs. Bull. les déplacements héliocentriques, observés et calculés, des étoiles figurées sur les plaques de Wallal et dont la distance au centre du Soleil était moindre que 2°. Les trois colonnes des tableaux renferment respectivement le numéro (*n*) de l'étoile dans le tableau original, les déplacements héliocentriques calculés (*e*) et observés (*o*), positifs ou négatifs, suivant que ce sont des éloignements ou des rapprochements.

1° Déplacements dont la mesure a été jugée *bonne*:

n	*e*	*o*	*n*	*e*	*o*	*n*	*e*	*o*
18	+ 0″,11	— 0″,09	63	+ 0,81	+ 0,72	91	+ 0,22	+ 0,37
25	+ 0,17	+ 0,11	64	+ 0,16	+ 0,17	92	+ 0,12	+ 0,24
27	+ 0,28	+ 0,21	65	+ 0,17	+ 0,51	98	+ 0,11	+ 0,44
36	+ 0,20	+ 0,30	72	+ 0,12	— 0,24	99	+ 0,11	+ 0,20
37	+ 0,22	+ 0,37	78	+ 0,43	+ 0,49	101	+ 0,15	+ 0,14
51	+ 0,18	+ 0,20	81	+ 0,34	+ 0,32	102	+ 0,13	+ 0,21
59	+ 0,33	+ 0,36	84	+ 0,28	+ 0,39	103	+ 0,13	+ 0,28
60	+ 0,57	+ 0,61	86	+ 0,16	— 0,09	104	+ 0,12	— 0,06

pas contentés. L'étude systématique des écarts individuels leur a montré la nécessité d'apporter à ce résultat une correction qui le fait monter à 2",05, en excès de 17 % sur la déflexion théorique. Il s'agirait là d'une incurvation supplémentaire, petite pour les rayons rasant le Soleil, atteignant un maximum de 0",4 à 2° ou 3° du centre du Soleil, et dans laquelle on pourrait reconnaître la mystérieuse réfraction annuelle (1).

En somme, le déplacement des rayons stellaires dans le voisinage du Soleil est un phénomène plus compliqué qu'on

2° Déplacements dont la mesure a été jugée *assez bonne* :

n	*e*	*o*	*n*	*e*	*o*	*n*	*e*	*o*
19	+ 0,13	+ 0,23	47	+ 0,44	+ 0,52	82	+ 0,21	+ 0,05
22	+ 0,12	+ 0,43	52	+ 0,34	+ 0,37	85	+ 0,24	+ 0,25
30	+ 0,20	+ 0,43	70	+ 0,24	+ 0,39	88	+ 0,28	+ 0,15
35	+ 0,34	+ 0,44	79	+ 0,39	+ 0,49	93	+ 0,17	0,00
41	+ 0,64	+ 0,73	80	+ 0,12	+ 0,30			

La mesure de 12 autres déplacements a été jugée *mauvaise*.

(1) Cette manière d'agir si consciencieuse des calculateurs semble méconnue par certains détracteurs de la Physique nouvelle : C. Buralli-Forti, *Flessione dei raggi luminosi stellari...*, ATTI DELLA R. ACAD. DELLE SCIENZE DI TORINO, t. 58 (1922-1923), p. 149. L'auteur de cette note reconnaît que la déflexion constatée est égale à la déflexion einsteinienne, ou du moins « du même ordre », mais part de cette égalité pour montrer le peu de valeur de la théorie : il faudrait, en effet, dit-il, trouver davantage, à savoir la somme de la déflexion gravifique et de la réfraction dans l'atmosphère solaire. Il ne parle pas de la réfraction annuelle. — Les astronomes américains ont soigneusement tracé sur leur carte le contour de la couronne et de la zone où se remarquait la moindre trace de luminosité solaire : en dehors de la couronne, il ne doit y avoir aucune influence appréciable d'une atmosphère extérieure sur la direction des rayons lumineux. D'autre part, les recherches récentes de A. Crommelin (M. N., t. 80, 1920) sur les comètes qui se rapprochent extrêmement du Soleil ont montré qu'aucun milieu matériel n'influence leur mouvement. — Quant à la possibilité d'un rôle joué par la réfraction annuelle, voir : A. Kopff, *La déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil et la théorie de la Relativité*, SCIENTIA, t. 35 (1924, 1), p. 397 ; d'après cet auteur, la réfraction annuelle pourrait n'être qu'une erreur systématique due aux méthodes d'observation, comme une modification, insoupçonnée jusqu'ici, que subiraient les constantes de la réfraction atmosphérique, suivant l'angle des directions du Soleil et de l'objet observé.

n'avait pensé. Pour beaucoup d'astronomes, les observations de l'éclipse de 1922 sont concluantes (1). Mais tous ne sont pas de cet avis : pour E. Esclangon (2), « ces observations sont encore impuissantes à élucider la question posée ; elles ne confirment ni n'infirment la loi de déviation d'Einstein ; elles semblent indiquer seulement, si l'on peut écarter vraiment toute hypothèse d'erreurs systématiques, l'existence de déviations au voisinage du Soleil sans qu'on puisse en fixer la loi, ni l'exacte grandeur au bord solaire... ; la question reste donc en suspens... ; on voit qu'elle comporte de grandes difficultés, peut-être insurmontables même, en ce qui concerne la discrimination de l'effet de relativité ; dans tous les cas, de nombreuses et nouvelles observations d'éclipses paraissent nécessaires... » (3).

LA RELATIVITÉ ET LE SPECTRE SOLAIRE

D'après la Physique relativiste, la période de vibration d'un électron varie avec l'intensité du champ de gravitation :

(1) Voir la discussion de R. Young dans le JOURNAL OF THE R. ASTRON. SOC. OF CANADA, t. 17, n° 4, et le rapport des M. N., t. 84 (1923-1924), p. 292.

(2) *Sur la déviation einsteinienne des rayons lumineux par le Soleil*, C. R., t. 178 (1924, 1), p. 196. Cette discussion s'appuie sur les résultats de l'expédition de l'observatoire Lick.

(3) Il est intéressant de voir ce que peut devenir dans la presse quotidienne une note aussi parfaitement objective que celle de E. Esclangon. Voici, de la séance de l'Académie, le procès-verbal de l'ÉCHO DE PARIS. « M. Émile Picard, au milieu de l'attention générale, présenta une note de M. Esclangon... [les conclusions ci-dessus]. M. Émile Picard avait déjà montré que la prétendue preuve fondée sur l'avancement du périhélie de Mercure n'était pas plus valable, puisque les formules d'Einstein ne donnent qu'une fraction de l'avancement réel. Il faut d'ailleurs ajouter que l'attraction de la lumière par les masses est une théorie de Newton et non d'Einstein. Mais les astronomes qui ont bien leur mot à dire en l'espèce, sont unanimement d'avis que la déviation, si elle existe, est si faible qu'elle est de l'ordre des erreurs probables. Les astronomes ont enfin (?) parlé, renforcés par un mathématicien incontesté ; espérons que les esprits par trop simplistes vont enfin comprendre que le silence est d'or ». — Et voilà !...

elle est d'autant plus longue, toutes autres choses égales, que le champ de gravitation est plus intense. La longueur d'onde d'une radiation lumineuse doit donc se montrer plus grande dans un rayon émané du Soleil que dans un rayon dû à l'incandescence du même gaz dans une source terrestre ; d'où, pour les relativistes, l'espoir que les raies d'absorption du spectre solaire, repérées d'une manière suffisamment précise, montreront, par rapport aux raies correspondantes d'une source terrestre, un déplacement vers l'extrémité rouge du spectre (1).

Ces observations sont extrêmement délicates. C'est que, en effet, il existe plusieurs autres causes de déplacement des raies spectrales, parmi lesquelles la pression qui règne dans la source, les mouvements radiaux du gaz incandescent, et peut-être l'état électrique du milieu rayonnant. La discrimination entre ces diverses causes de déplacement est difficile ; elle est rendue possible par des circonstances telles que celle-ci : il existe des raies, comme celles du cyanogène, insensibles à l'effet de pression, tandis que toutes les raies doivent être sensibles à la diminution gravifique de la fréquence, — à l'effet Einstein, — à savoir proportionnellement à leur longueur d'onde.

La conclusion est restée en suspens pendant plusieurs années. On se rappelle le progrès considérable qu'apporta A. Perot à la solution du problème en montrant que la pression dans les milieux absorbants du Soleil est extrêmement faible et sans influence appréciable sur la position des raies. Le terrain ainsi déblayé, C. Fabry (2) et H. Buisson ont repris les mesures des longueurs d'onde de raies du fer et ont pu annoncer la concordance de leurs résultats et de la prédiction d'Einstein.

Depuis deux ans cependant, les premiers enthousiasmes semblaient calmés, et le silence se faisait sur la découverte des physiciens français. Sans doute faut-il attribuer ceci à la résistance de deux spectroscopistes éminents qui se

(1) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, R. Q. S., 4e série, t. 2 (1922, 2), p. 194 (p. 27 du tiré-à-part).

(2) Ch. Fabry, *La théorie de la Relativité et le déplacement des raies spectrales produit par le champ de gravitation*, SCIENTIA, t. 34 (1923, 2), p. 149.

consacraient, sans y réussir, à la révélation de l'effet Einstein : J. Evershed à Kodaikanal, et C. St John à Mount-Wilson. — Ces deux astronomes viennent de publier leur conversion (1).

J. Evershed a poursuivi ses études dans l'hypothèse d'une pression solaire négligeable ; la comparaison du spectre solaire et du spectre de l'arc électrique a porté sur les raies du fer, du titane, du calcium, du nickel, du sodium et du cyanogène. Dès les recherches d'il y a trois ans, le déplacement des raies du fer et du cyanogène s'était montré favorable à la Relativité, mais l'analyse spectroscopique de la lumière réfléchie sur Vénus s'y était montrée défavorable (2). Aujourd'hui on s'aperçoit de ce qu'il y a une distinction à faire entre les raies dues à la haute atmosphère solaire et les raies dues aux couches voisines de la surface de l'astre. Si on se limite à ces dernières raies, comme il semble naturel, pour ne pas risquer de se heurter à des difficultés supplémentaires, on conclut que les déplacements spectraux observés dans la lumière émanée de tous les points de l'astre ne peuvent pas être expliqués entièrement par les mouvements suivant la ligne de visée, la pression et la dispersion anomale. La partie du déplacement spectral inexpliquée par l'ensemble de ces diverses causes est, à trois millièmes de micron près (raies du sodium), conforme à l'effet Einstein. — Il reste à trouver la raison des déplacements trop considérables des raies dues aux hautes couches de l'atmosphère solaire, et quelques anomalies dans les déplacements de certaines lignes.

C'est aussi la certitude d'une pression solaire négligeable qui a donné un nouvel élan aux recherches de l'observatoire de Mount-Wilson, sous la direction de St John. — Dans la crainte d'un déplacement perturbateur dû à cette pression,

(1) J. Evershed, *The Einstein effect in the solar spectrum*, OBS., t. 46 (1923), p. 299. — Communication de St John à la réunion de Los Angelès de l'American Association for the Advancement of Science, SCIENCE du 28 septembre 1923, et OBS, t. 46 (1923), p. 343 ; puis, article détaillé : *On gravitational displacement of solar lines*, M. N., t. 84 (1923-1924), p. 93.

(2) Voir cette *Revue d'Astronomie* pour 1921, R. Q. S., 4e série, t. 2 (1922, 2), p. 176 (p. 9 du tiré-à-part).

on s'était limité jusqu'alors à l'examen des lignes du cyanogène, insensibles à la pression, mais dont l'intensité augmente avec la température, ce qui rend difficile leur comparaison dans le spectre solaire et dans un spectre de laboratoire.

Les travaux récents ont consisté dans le rapprochement de plusieurs centaines de lignes du fer dans un spectre d'arc à une pression nulle, dans un spectre d'arc à la pression atmosphérique, et dans le spectre solaire.

Dans les résultats d'Evershed, l'effet Einstein était vérifié dans les couches inférieures de l'atmosphère, et il y avait excès dans les couches supérieures. — Ici, il y a excès encore dans les couches supérieures, mais déficit dans les couches inférieures, de sorte qu'il existe un niveau moyen où l'effet Einstein est exactement vérifié. Il faut avoir recours. dans les autres niveaux, à l'hypothèse de courants atmosphériques. — Quant aux rayons émanés du bord du disque solaire, ils donnent naissance à une difficulté nouvelle : pareil rayon traverse une plus grande épaisseur d'atmosphère, et la réfraction dans celle-ci va se manifester davantage : il y aura, à la limite de la raie considérée, du côté rouge du spectre, réfraction plus forte qu'à sa limite du côté violet, d'où un déplacement nouveau vers l'extrémité rouge. — Voici la conclusion de St John : « Trois causes systématiques donnent aux longueurs d'onde des radiations solaires d'autres valeurs qu'aux longueurs d'onde des radiations terrestres correspondantes, et il est possible de séparer leurs effets : le ralentissement de la vibration atomique conformément à la Relativité générale, la vitesse radiale des courants atmosphériques solaires, et la dispersion différentielle que subissent les diverses radiations dans leur passage à travers l'atmosphère solaire. La première de ces causes se manifeste dans toutes les radiations et en tous les points du disque solaire, la deuxième apparaît d'une manière continue et régulière dans des courants opposés aux niveaux les plus hauts et les plus bas, tandis que la troisième se fait sentir dans les rayons émanés du bord du disque solaire » (1).

(1) Dans une lettre à l'OBSERVATORY, J. Comas Solà (Barcelone) rappelle que sa théorie à la fois émissive et ondulatoire de la lumière prévoit exactement le déplacement dit einsteinien des raies

C'est un peu avant les publications d'Evershed et de St John que F. Croze a fait à la Société de Physique cette conférence dans laquelle il s'est montré si sévère pour la Relativité (1). — S'il existe, le déplacement einsteinien est parfaitement mesurable, et on sait fort bien que des déplacements ont lieu dans le sens qu'il indique ; mais parmi les causes de ces déplacements, il en est une à laquelle les relativistes semblent ne pas vouloir penser : c'est l'« effet de pôle » qui se manifeste dans le spectre de l'arc de comparaison, et par lequel la longueur d'onde dépend de la distance des pôles ainsi que de l'intensité et de la tension du courant électrique. Il est vrai que des raies insensibles à l'effet de pôle ont parfois été utilisées, mais en nombre trop petit. De plus, les déplacements observés ne sont pas du tout proportionnels aux longueurs d'onde comme le voudrait la théorie relativiste, — et la cause probable du déplacement des raies doit être cherchée dans la dispersion anomale, quoi qu'en pensent les astronomes américains qui croient la pression de l'atmosphère solaire assez faible pour que ce phénomène y soit évité (2).

du spectre solaire. Dans cette théorie, qui ne sort pas du cadre de la dynamique classique, l'énergie rayonnante est soumise à la gravitation, et l'accroissement de la longueur d'onde d'une radiation émanée du Soleil n'a pas d'autre cause que l'attraction de cet astre « retenant » quelque peu les rayons lumineux qui en émanent.

(1) F. Croze, *Le déplacement vers le rouge des raies de Frauenhofer et la théorie d'Einstein*, JOURNAL DE PHYSIQUE, 6e série, t. 4 (1923), p. 198.

(2) Sous le titre *On the relation between the masses and luminosities of the stars*, A. Eddington (Cambridge) a publié dans les M.N. (t. 84, 1923-1924, p. 308) un article dont les conclusions compromettent la distinction classique entre les étoiles naines et les étoiles géantes ; ce même article renferme l'explication d'une anomalie extraordinaire présentée par certaines étoiles, — les blanches naines, — telles que le compagnon de Sirius. Le rapprochement de la masse et de la température de cet astre oblige à lui attribuer une densité de 53 kg. par cm^3. Si cette explication permet de satisfaire à pareille exigence, cette densité énorme crée à la surface de l'astre, dont le rayon serait alors moindre que 20.000 km., un champ de gravitation très intense, et les raies du spectre du compagnon doivent subir un déplacement vers le rouge tel que celui qui serait dû, par l'effet Doppler-Fizeau, à un éloignement de 20 km/sec. — D'un autre point de vue, on s'est occupé récemment de l'effet

Tel est le bilan de la Relativité dans ses confirmations astronomiques (1). — Dans la réunion du 8 juin 1923 de la Royal Astronomical Society, H.-A. Lorentz a indiqué une *nouvelle confirmation astronomique de la Relativité* (2) ; les calculs qui y conduisent ont été faits par les mathématiciens hollandais Schouten, Fokker et Kramer à propos de la rotation d'une sphère homogène autour de son centre. D'après la Mécanique classique, dans un champ newtonien, l'axe de rotation d'un pareil solide ne peut que se déplacer parallèlement à lui-même : c'est parce que la Terre est un

Einstein dans la lumière des étoiles : J. Weber (Leipzig), *Ueber die Rotverschiebung auf dem Sirius*, A. N., t. 217 (1922-1923), n° 5200. Sirius, par exemple, appartient au *courant* des étoiles de la Grande Ourse, et devrait avoir, comme tel, une vitesse de rapprochement de 8,5 km/sec, tandis que son spectre témoigne d'un rapprochement de 7,4 km/sec. La différence serait due à l'effet gravifique subi par les atomes vibrant à sa surface ; la valeur connue de la masse de Sirius et la grandeur admise pour son rayon appuyent cette hypothèse.

(1) Ceux qui ont étudié la Relativité et qui savent combien c'est autre chose que ce que disent les journaux ne doivent pas manquer de lire l'article écrit par H. Bouasse pour SCIENTIA au début de 1923 (t. 33, p. 13) : *La question préalable contre la théorie d'Einstein.* — « ... Les données intuitives de notre cerveau forment un bloc que vous n'avez pas le droit de diviser », et en présence des contradictions initiales, « nous n'irons pas plus avant dans la théorie » ... « De tout ce papier noirci, de toutes ces palabres, de tout ce battage, qu'est-il sorti *de nouveau* depuis 17 ans ? — Trois résultats douteux, en tout cas insignifiants par rapport à l'ensemble des phénomènes connus, trois résultats dont on trouvera trente-six interprétations différentes quand on se donnera la peine de les chercher ! » — H. Bouasse met « dans le même sac » Einstein et Bergson. On sait cependant la divergence d'opinions qui sépare le physicien et le philosophe en ce qui concerne la relativité du temps. Sur cette question, voir : H. Bergson, *Durée et Simultanéité* (Paris, Alcan, éd. de 1923) ; J. Maritain, *Nouveaux débats Einsteiniens* (REVUE UNIVERSELLE d'avril 1923) ; M. La Rosa, *Le concept de temps dans la théorie d'Einstein* (SCIENTIA, t. 34, 1923-2, p. 225, 293) ; Ch. de la Vallée Poussin, *Le temps et la Relativité restreinte* (discours prononcé devant la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, BULLETIN DE LA CLASSE, décembre 1923, et, avec des notes complémentaires, R. Q. S., t. 5 de la 4e série, 1924-1, p. 321) ; le chapitre *Einstein ou Bergson*, de *Notre maître le Temps*, par Ch. Nordmann (Paris, Hachette, 1924 ; ce chapitre a paru d'abord dans le n° du 28 juin de l'ILLUSTRATION).

(2) OBS., t. 46 (1923), p. 212.

ellipsoïde de révolution, avec son plan équatorial distinct du plan de l'écliptique, qu'il y a rétrogradation de l'équinoxe, que l'axe de la Terre décrit un cône autour de la normale au plan de l'écliptique en sens inverse du mouvement de révolution ; la durée de ce mouvement de précession, environ 26000 ans, est d'autant plus grande que l'ellipsoïde terrestre est moins aplati : cet ellipsoïde serait-il allongé que le mouvement se ferait dans l'autre sens.

Au contraire, dans la théorie relativiste, il y a déjà précession pour une sphère homogène, mais c'est un déplacement qui n'est, pour la Terre, que de 1",9 par siècle, la 2600^{me} partie de la précession ordinaire. D'après W. De Sitter, ce terme de précession est en soi assez grand pour pouvoir être observé, mais la difficulté est de le dégager de la précession ordinaire ; celle-ci ne peut se calculer que pour des valeurs censées connues des moments d'inertie principaux de l'ellipsoïde terrestre, c'est-à-dire dans l'hypothèse de telle distribution des densités de son centre à sa surface (1), — et on pourra toujours indiquer pareille distribution de manière à retrouver la précession observée, y compris le petit terme que prévoit la Relativité (2).

La courbure de l'espace-temps et les dimensions de l'Univers. — Dans l'étude d'une surface se rencontre une notion à laquelle a été donné le nom de *courbure totale* : c'est, au point considéré de la surface, le produit des courbures des deux sections normales principales, nombre attaché à chaque point de la surface et variant généralement d'un point à l'autre : il s'exprime donc au moyen des deux coordonnées d'un point quelconque de la surface, telles que, sur l'ellipsoïde terrestre, la longitude et la latitude. En particulier, sur la surface sphérique, la courbure totale est

(1) M. Alliaume, *La rigidité de la Terre d'après des expériences récentes*, R. Q. S., 3^{e} série, t. 29 (1921, 1), p. 96 (voir p. 102).

(2) On remarquera dans cette théorie et son application astronomique, cette même apparence de mélange de la Mécanique newtonienne et de la Mécanique relativiste qui a fait scandale dans l'étude du déplacement des périhélies. Cette indignation de naguère serait aussi peu justifiée ici : la Mécanique newtonienne est une approximation de la Mécanique relativiste.

invariable ; elle est nulle sur une surface développable, sur le plan.

L'univers, dans l'espace et dans le temps, s'étudie au moyen des quatre coordonnées de l'un quelconque des événements dont il constitue l'ensemble ; dans cette étude se rencontre l'expression correspondant à la courbure (totale) de la théorie des surfaces : c'est, par définition, la courbure de l'univers. — L'inverse de la racine carrée de la courbure totale est une longueur, un rayon de courbure, d'où, par analogie encore, l'habitude de parler d'une longueur appelée rayon de l'univers.

Cette analogie peut se poursuivre encore un peu : dire que la courbure de l'univers est nulle, ou que le rayon de l'univers est infini, c'est dire qu'extrêmement loin de toute masse (et de toute énergie) le principe classique de l'inertie est applicable ; que les points matériels abandonnés à eux-mêmes y ont un mouvement rectiligne et uniforme, que les géodésiques de l'espace-temps s'expriment par des équations du premier degré, — bref, que l'espace y est euclidien. Un champ de gravitation est une déformation de l'espace-temps, à partir d'un espace-temps euclidien.

Cette conception d'un espace-temps euclidien, infini, se heurte à de graves difficultés ; et Einstein l'a remplacée par celle d'un espace-temps dans lequel, en dehors de l'influence de toute masse (et de toute énergie) les trajectoires des corps abandonnés à eux-mêmes s'exprimeraient analytiquement de la même manière que les grands cercles dans l'étude de la sphère : l'expression qui joue le rôle du rayon de ces grands cercles (et par conséquent de la sphère) est le rayon de l'univers. Pareil univers n'est pas infini ; il est illimité.

Dans la conception particulière d'Einstein (par opposition à celle de De Sitter et de Weyl), il y a, de plus, un sens à parler, à chaque instant, du rayon de l'espace : un rayon lumineux partant d'un point quelconque finira par y revenir après avoir, sauf perturbations gravifiques accidentelles, parcouru un chemin mesuré par le produit de ce rayon et du 2π de la Géométrie élémentaire (1). — Peut-on se faire

(1) Il y a aussi un sens, mais un sens différent, à parler du rayon de l'univers dans la conception de De Sitter. Cette conception est

une idée de la grandeur de ce rayon ? — Voici une entreprise admirable de « self-confidence » où les élèves mathématiciens de l'University of North Carolina n'ont pas reculé devant une détermination aujourd'hui encore si hasardeuse (1) : résultat, ordre de 150 millions d'années de lumière. — Voici encore, au début de 1924, une série de leçons de Silberstein à la Physical Society de l'Université de Montréal (2) : résultat, ordre de 100 millions d'années de lumière.

L'inconnue de ce problème est une grandeur dont l'existence même n'est pas sûre, et cette existence se montrera d'autant plus probable que des calculs indépendants lui attribueront des valeurs moins divergentes. Les résultats d'aujourd'hui ne peuvent être considérés que comme grossièrement provisoires : n'est-on pas passé par pareille phase dans bien des théories physiques, par exemple dans la théorie cinétique des gaz ?

Ce qui peut être fait de mieux, dans l'état actuel de nos connaissances, n'est que la détermination d'une limite inférieure du rayon de l'univers. — Les potentiels caractéristiques d'un champ de gravitation s'écrivent différemment suivant que l'espace-temps serait, sans matière ni énergie, euclidien ou non-euclidien. Dans ce dernier cas, ils s'écrivent au moyen d'un paramètre lié au rayon de l'univers. Il en résulte, en particulier, que, toutes autres choses égales, la trajectoire d'une planète appartient à une infinité simple

celle qui serait réalisée dans un univers vide à part un centre matériel créant un champ de gravitation symétrique : il existe une distance limite à ce point, et cette distance infranchissable est le rayon de l'*univers sphérique* de De Sitter. Au contraire, la conception d'Einstein est celle qui serait réalisée par une certaine distribution idéale de la matière : c'est un *univers cylindrique*, dont les sections instantanées sont des sphères ; un rayon lumineux y parcourt un grand cercle de pareille sphère. Les univers de De Sitter et d'Einstein sont des cas extrêmes dont l'univers vrai est sans doute un intermédiaire. — Voir A. Eddington, *The mathematical theory of Relativity* (Cambridge, 1923), nos 45, 65-71, et J. Becquerel, *Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la formule de Schwarzschild* (Paris, Hermann, 1923).

(1) A. Henderson, *The Size of the universe*, SCIENCE, t. 58, n° 1497 (1923), p. 167.

(2) A. Douglas, *Determination of the curvature invariant of space-time*, SCIENCE, t. 59, n° 1527 (1924), p. 311.

de lignes dont chacune est caractérisée par une valeur numérique de ce paramètre, ou de ce rayon : le déplacement du périhélie dépend de cette valeur numérique.

Les 42",9 du déplacement séculaire du périhélie de Mercure sont calculées dans l'hypothèse d'un univers euclidien à l'infini ; les déplacements correspondants pour Vénus, la Terre et Mars sont respectivement 8",61, 3",83, 1",35. Ces déplacements augmentent dans un univers non-euclidien à l'infini, d'autant plus que le rayon d'univers est moindre et que la planète est moyennement plus éloignée du Soleil ; d'où, par comparaison entre les déplacements périhéliques observés et les déplacements périhéliques calculés dans l'hypothèse d'un univers euclidien à l'infini, la possibilité, en principe, de calculer le rayon de l'univers. — C'est ce qu'a ébauché J. Chazy (1).

La grande distance de Saturne au Soleil rend le périhélie de cette planète insensible au terme euclidien, très sensible au terme non-euclidien. Leverrier attribue à son périhélie un déplacement séculaire de 40" qui reste inexpliqué par la loi newtonienne : le rayon d'univers correspondant est de l'ordre de 1000 années de lumière. beaucoup trop faible, quoique encore sans influence sur le périhélie de Mercure. Il faut donc réserver la possibilité d'une influence inconnue, tout en reconnaissant aux recherches de J. Chazy l'intérêt que présente ce principe d'une méthode susceptible, par son application à d'autres perturbations inexpliquées, de fixer une limite inférieure au rayon de l'univers (2).

(1) J. Chazy, *Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la Relativité*, C. R., t. 174 (1922, 1), p. 1157.

(2) Voir aussi, dans le même ordre d'idées, aux C. R., t. 176 (1923, 1) : J. Haag, *Sur le problème intérieur de Schwarzschild dans le cas d'une sphère hétérogène*, p. 658, et *Sur le problème de Schwarzschild dans le cas d'un univers courbe*, p. 1538 ; M. Nuyens, *Champ gravifique dû à une sphère massique, en tenant compte de la constante cosmique*, p. 1376.

N° 13.

Sur les deux espèces d'années entrant dans un calendrier

par M. E. Pasquier (1)

1. En Astronomie — on le sait — on distingue diverses années mais une seule, l'année tropique, intéresse la vie civile.

Si l'année tropique était constante et comprenait un nombre entier de jours, le calendrier idéal serait celui qui aurait cette année-là comme base, car les saisons reviendraient chaque année aux mêmes dates.

D'après les *Tables du Soleil* de S. Newcomb, la valeur de l'année tropique en 1900 est égale à $365^j,24219879$; elle diminue maintenant de $0^s,53$ par siècle. Dans ce travail, spécialement dans les cinq premiers §§, elle sera considérée comme restant constante, égale à ce qu'elle était en 1900 d'après Newcomb (2). En agissant de

---

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. 44 (1925), p. 20, de la deuxième partie.

(2) Si l'on appelle t le temps, exprimé en siècles juliens (donc de 36525 jours solaires moyens) et compté à partir de 1900, la durée de l'année tropique à l'époque t a, d'après les Tables de Le Verrier et de Gaillot, pour expression

$$365^j,24219647 - 0,00000624\,t.$$

On voit qu'en 1900 l'anné tropique d'après les Tables de Newcomb était plus grande que celle fournie par les Tables de Le Verrier et de Gaillot ; la différence est de $0^j,0000023$. D'autre part, en diminuant de $0^s,53$ par siècle, l'année tropique d'après les Tables de Newcomb subit une réduction séculaire de $0^j,00000613$, tandis que d'après les Tables de Le Verrier et de Gaillot la réduction de l'année tropique est de $0^j,00000624$ par siècle. Cette réduction

la sorte, on obtient, quand on ne s'écarte pas trop de l'année 1900, une première approximation qui est déjà très grande, vu l'extrême lenteur avec laquelle varie l'année tropique.

L'année tropique étant égale à 365 jours plus une fraction et l'année civile devant comprendre un nombre entier de jours, on est amené à faire usage, dans un même calendrier, d'années de 365 et d'années de 366 jours. Les premières sont dites les années *communes*, les deuxièmes les années *bissextiles* (ou *non communes*).

Tout calendrier est établi de telle manière qu'après un nombre déterminé d'années propre à chaque calendrier, les années communes et les années bissextiles se reproduisent dans le même ordre : le nombre déterminé d'années dont il vient d'être question constitue le *cycle* du calendrier considéré.

Généralement, on prend comme cycle le plus petit nombre d'années qui satisfait à la condition imposée ; sauf indication contraire, c'est ce qui sera supposé dans la suite.

Si l'on multiplie par 365 le nombre d'années communes entrant dans le cycle et par 366 le nombre d'années bissextiles comprises aussi dans le cycle et si l'on divise la somme de ces produits par le nombre total d'années du cycle, on obtient un quotient qui est, en jours, la longueur de l'*année moyenne* du calendrier dont il s'agit.

Pour qu'un calendrier réponde à son objet, on doit naturelle-

---

séculaire est donc moindre d'après les Tables de Newcomb que d'après les Tables de Le Verrier et de Gaillot. Par suite, la différence de l'année tropique, calculée d'après ces deux espèces de Tables, ne fera que croître dans l'avenir.

Il n'est pas nécessaire d'avoir recouru aux sources, c'est-à-dire aux travaux originaux de Newcomb, Le Verrier et Gaillot, ainsi qu'à la critique des observations sur lesquelles ces astronomes ont fondé les lois auxquelles il vient d'être fait allusion, pour être convaincu que dans l'état actuel de la science ces lois ne peuvent être appliquées qu'avec une extrême prudence et peut-être seulement pour un très petit nombre de siècles avant ou après l'époque actuelle. Au § 6, je donnerai l'avis émis par M. Bigourdan en 1922 à ce sujet en ce qui concerne l'avenir. Pour le moment, je me borne à renvoyer à l'ouvrage suivant, qui renferme à ce propos de précieuses références :

Chauve-Bertrand, *La réforme du calendrier*, pp. 120-125. Paris, 1921, La Renaissance du livre, Boulevard St-Michel, 78.

ment s'arranger de façon que l'année moyenne diffère très peu de l'année tropique. Donnons à ce propos quelques exemples.

Dans le calendrier julien, l'année moyenne est de $365\frac{1}{4}$ jours ; elle est de $\left(365\frac{1}{4} - \frac{3}{400}\right)$ jours dans le calendrier grégorien.

Vega en 1801, Mädler en 1842, ont proposé (1) un calendrier où l'année moyenne se confondrait à très peu près avec l'année tropique. Dans ce calendrier, l'année moyenne serait égale à $\left(365\frac{1}{4} - \frac{1}{128}\right)$ jours, ou, si l'on préfère, à 365,2421875 jours exactement ; cette année est très approximativement égale à l'année tropique actuelle.

Plus récemment, en mai 1923 (2), lors du Congrès des Églises orthodoxes orientales qui s'est tenu à Constantinople sous la présidence du patriarche œcuménique Ménélius IV, M. Milankovitch fit une proposition, qui fut acceptée ; il résulte de cette acceptation que ces Églises adoptent maintenant un calendrier dont l'année moyenne est égale à $\left(365\frac{1}{4} - \frac{7}{900}\right)$ jours.

Notons encore le cas où l'année moyenne est égale à $\left(365\frac{1}{4} - \frac{1}{125}\right)$ jours. Ecrite sous forme décimale, la fraction

(1) Pour plus de détails et pour d'autres calendriers, on peut, entre autres, consulter F. K. Ginzel, *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*, 3e vol., §§ 267, 268 et 269. Leipzig, J. C. Hinrichs, 1914.

Pour le même objet, on peut aussi consulter avec fruit le document CCT/RC/7 et son annexe, autographiés sous les auspices de la Société des Nations, mai 1924.

(2) Pour des détails à ce sujet, v. Milankovitch, *Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender orientalischer Kirchen*, dans les Astronomische Nachrichten, t. 220, n° 5279, pp. 379-384, déjà cité p. 328 dans *Sur un projet de réforme du calendrier grégorien*, par E. Pasquier, ASSB année 1923-1924, 1re partie. Il doit être entendu, une fois pour toutes, que dans ce travail, ASSB est une manière abrégée d'écrire Annales de la Société scientifique de Bruxelles.

$\frac{1}{125}$ devient 0,008, de sorte que l'année moyenne correspondante est égale à 365,2420 jours.

Parmi les nombreux calendriers (ou projets de calendriers) qui sont composés d'années de 365 et de 366 jours, ceux dont il vient d'être question sont, pour l'objet que j'ai en vue, particulièrement intéressants. Étudions-les maintenant de plus près en calculant pour chacun d'eux le nombre d'années communes et le nombre d'années bissextiles (1), dans l'hypothèse où l'on connaît la longueur de l'année moyenne.

Comme on va le voir, le cycle de chaque calendrier est alors lui-même déterminé.

Désignons en général par a_1 le cycle en vue ; soient x_1 le nombre d'années communes et y_1 le nombre d'années bissextiles qui entrent dans le cycle.

Considérons d'abord le cas du *calendrier julien*, qui est le plus simple. Dans ce calendrier — nous l'avons dit — l'année moyenne est de $365\frac{1}{4}$ jours ; pour déterminer x_1 et y_1, on peut évidemment, en vertu même des définitions du cycle et de l'année moyenne, poser les deux équations que voici :

$$(1_1) \qquad x_1 + y_1 = a_1, \quad 365x_1 + 366y_1 = 365\frac{1}{4}a_1.$$

On en déduit aisément :

$$(2_1) \qquad x_1 = \frac{3}{4}a_1, \quad y_1 = \frac{1}{4}a_1.$$

Pour que, comme cela doit être, a_1 et y_1 soient des nombres entiers, il est nécessaire et suffisant que a_1 soit divisible par 4 ; a_1 est donc égal à 4 ou à l'un de ses multiples. Si l'on prend $a_1 = 4$, on a $y_1 = 1$ et $x_1 = 3$. En d'autres termes, le cycle du

---

(1) De ces deux nombres, celui qui donne les bissextiles est cependant de loin le plus important ; c'est sur celui là que se basent les *règles* dont il sera question au § 4 de ce travail. Comme on le verra, la règle donnée pour le nouveau calendrier des églises orientales n'adopte pas le plus petit nombre satisfaisant à la définition du cycle.

calendrier julien est de 4 années ; trois de ces années sont des années communes et la quatrième est bissextile.

Passons au *calendrier grégorien.* L'année moyenne y est, en jours, de $365{,}25 - \frac{3}{400}$ ou de $365 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{400}\right)$.

Dans ce cas, on peut successivement écrire :

$$(1'_1) \quad x_1 + y_1 = a_1, \quad 365\,x_1 + 366\,y_1 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400}\right)a_1 ;$$

$$(2'_1) \qquad x_1 = \frac{303}{400}\,a_1, \quad y_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{400}\right)a_1 = \frac{97}{400}\,a_1.$$

Pour que y_1 soit un nombre entier, il est nécessaire et suffisant que $97a_1$ soit divisible par 400 ; mais 97 et 400 sont premiers entre eux ; par suite, a_1 est divisible par 400. Le minimum de a_1 est donc 400 ; alors $y_1 = 97$ et $x_1 = 303$.

Supposons maintenant que nous ayons affaire au *nouveau calendrier des églises orthodoxes orientales.* Par hypothèse, la longueur de l'année moyenne est, en jours, égale à $365{,}25 - \frac{7}{900}$. Dans ce cas, on a évidemment :

$$(1''_1) \quad x_1 + y_1 = a_1, \quad 365\,x_1 + 366\,y_1 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{7}{900}\right)a_1 ;$$

$$(2''_1) \qquad x_1 = \frac{341\,a_1}{450}, \quad y_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{900}\right)a_1 = \frac{109}{450}\,a_1.$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve aisément que a_1 est au moins égal à 450. — Si l'on prend $a_1 = 450$, on a $y_1 = 109$ et par suite $x_1 = 341$. Si l'on prend, comme dans la règle des églises orthodoxes, $a_1 = 900$, y_1 sera égal à 218 et x_1 à 682.

Dans les calendriers examinés jusqu'à présent, l'année moyenne est légèrement supérieure à l'année tropique actuelle. Nous allons maintenant considérer deux calendriers pour lesquels c'est l'année tropique qui est légèrement plus grande que l'année moyenne.

Et d'abord dans le *calendrier de Mädler,* l'année moyenne, exprimée en jours, est égale à $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128}$.

Si l'on appelle encore a_1 le cycle du calendrier considéré et si x_1 et y_1 sont respectivement le nombre d'années communes et le nombre d'années bissextiles qui correspondent à ce cycle, on a évidemment :

$$(1'''_1) \quad x_1 + y_1 = a_1, \qquad 365\,x_1 + 366\,y_1 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128}\right) a_1 ;$$

$$(2'''_1) \qquad x_1 = \frac{97}{128}\,a_1, \qquad y_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{128}\right) a_1 = \frac{31}{128}\,a_1.$$

En raisonnant comme pour les exemples précédents, on trouve aisément que la plus petite valeur de a_1 est 128. Dans le calendrier mädlerien, le cycle est donc de 128 années et le nombre de bissextiles de 31. Quant au nombre d'années communes, il est évidemment de 97.

Dans le dernier cas que je veux considérer pour le moment, l'année moyenne est égale à $\left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{125}\right)$ jours. En suivant la marche ordinaire, on trouve aisément pour ce cas :

$$(1^{\text{IV}}_1) \quad x_1 + y_1 = a_1, \qquad 365\,x_1 + 366\,y_1 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{125}\right) a_1 ;$$

$$(2^{\text{IV}}_1) \qquad y_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{125}\right) a_1 = \frac{121}{500}\,a_1, \qquad x_1 = \frac{379}{500}\,a_1.$$

On en conclut que le minimum de a_1 est alors 500, le minimum de y_1, 121 et le minimum de x_1, 379.

On aura remarqué la persistance avec laquelle j'ai maintenu, dans les seconds membres des relations (2) donnant la valeur de y_1, une première forme qui est très caractéristique en ce sens qu'elle permet de conclure l'expression générale de y_1 dans tout calendrier composé d'années de 365 et de 366 jours. Cette expression générale, qui saute aux yeux, aurait pu aussi, bien entendu, être établie directement, sans difficulté. Si l'on admet que l'année moyenne du calendrier considéré, exprimée en jours, est égale à

$365 + \frac{1}{4} - \epsilon$, on a évidemment, dans le cas général, entre y_1, a_1 et ϵ, la relation :

$$(\alpha_1) \qquad y_1 = \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) a_1.$$

Abstraction faite du cas où $\epsilon = 0$ (cas du calendrier julien), ϵ est toujours une petite fraction positive. Pour les exemples susvisés, on a :

$\epsilon = \frac{3}{400}$ dans le calendrier grégorien ;

$\epsilon = \frac{7}{900}$ dans le nouveau calendrier des églises orthodoxes ;

$\epsilon = \frac{1}{128}$ dans le calendrier mädlérien ;

$\epsilon = \frac{1}{125}$ dans le calendrier signalé en dernier lieu.

Dans ces cas (sauf le dernier) et plus généralement quand le dénominateur de ϵ est un multiple de 4, le rapport $\frac{y_1}{a_1}$ [l'égal de $\frac{1}{4} - \epsilon$ d'après la relation (α_1)] peut être considéré comme une fraction ordinaire dont le dénominateur est le même que celui de ϵ. Si, par la transformation de $\frac{1}{4}$ en une fraction équivalente ayant même dénominateur que ϵ, $\frac{1}{4} - \epsilon$ constitue une fraction irréductible, on peut dire que le minimum de a_1 est égal à ce dénominateur ; y_1 est alors lui-même égal au numérateur de $\frac{1}{4} - \epsilon$.

Mais si $\frac{1}{4} - \epsilon$ est réductible à une plus simple expression, par exemple à $\frac{\mu_1}{\nu_1}$, on peut écrire, au lieu de (α_1) :

$$(\alpha'_1) \qquad \frac{y_1}{a_1} = \frac{\mu_1}{\nu_1},$$

où μ_1 et ν_1 sont premiers entre eux ; en principe le minimum de a_1 est alors ν_1 et le minimum de y_1 est μ_1.

Comme on l'a vu plus haut, dans le calendrier grégorien, dans le calendrier mädlerien et dans celui où $\epsilon = \frac{1}{125}, \frac{1}{4} - \epsilon$ se présente immédiatement sous sa forme la plus simple, mais il n'en est pas de même dans le cas du nouveau calendrier des églises orthodoxes.

2. Pendant ces derniers temps, en vue de rendre le calendrier *perpétuel* sans être astreint à l'introduction de jours blancs (1) (ou jours hors cadre ou hors semaine), on a proposé de composer le calendrier d'années de 52 semaines et d'années de 53 semaines. Dans un pareil calendrier, les années communes sont celles de 52 semaines et les années non communes sont celles de 53 semaines. On peut citer, à ce propos, le calendrier de Searle (2) et le calendrier de Bedeus (3).

De même qu'un calendrier ayant des années de 365 et de 366 jours, un calendrier ayant des années de 52 et de 53 semaines possède un cycle et une année moyenne. Inutile de s'arrêter aux définitions de ces termes pour les calendriers actuellement considérés, car ces définitions se calquent sans difficulté sur celles qui ont été données au § 1 à l'occasion des calendriers étudiés dans ce §.

Dans les calendriers où les deux espèces d'années sont de 364 et de 371 jours, on opère, pour trouver le nombre d'années communes et le nombre d'années non communes, comme dans les cas examinés au § précédent et où les deux espèces d'années étaient de 365 et de 366 jours.

Considérons d'abord le *calendrier de Searle*.

Dans ce calendrier, l'année moyenne, exprimée en jours, est

---

(1) Cf. ASSB, art. cité, p. 330. — Sur douze membres du Bureau des Longitudes, sept se sont prononcés contre la rupture de la continuité de la semaine et quatre lui ont été favorables (Société des Nations, C. C. T./R. C. 4, p. 6, *Observations de M. Émile Picard).*

(2) George M. Searle, *Calendar Reform.* Cf. ASSB, art. cité, p. 335, note (1).

(3) G. Bedeus, *Die Regeln des Reformkalenders.* Cf. ASSB, art. cité, p. 336, note (1).

égale à 365, 2425 comme dans le calendrier grégorien. Si l'on appelle x_2, y_2, a_2 les quantités ayant pour les calendriers à 52 et 53 semaines une signification analogue respectivement aux quantités x_1, y_1, a_1 introduites au § 1, on aura :

$$(1_2)\quad x_2 + y_2 = a_2,\quad 364x_2 + 371y_2 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400}\right) a_2 ;$$

$$(2_2)\qquad x_2 = \frac{329 a_2}{400},\qquad y_2 = \frac{\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400}\right)}{7} a_2 = \frac{71}{400} a_2 .$$

En raisonnant comme dans le § 1, on constate aisément que la plus petite valeur de a_2 est 400.

Ainsi, dans le calendrier de Searle, le cycle est de 400 ans comme dans le calendrier grégorien. La valeur de y_2 correspondant à ce cycle est 71 et celle de x_2, 329.

Passons au *calendrier du Baron Bedeus.*

Adoptons, comme dans le cas du calendrier de Mädler, une année moyenne de $\left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128}\right)$ jours ; on aura, si l'on compte les années communes de 364 jours et les années non communes de 371 jours :

$$(1'_2)\qquad x_2 + y_2 = a_2,\qquad 364x_2 + 371y_2 = \left(365 + \frac{1}{4} \quad \frac{1}{128}\right) a_2 ;$$

$$(2'_2)\qquad x_2 = \frac{737 a_2}{896},\qquad y_2 = \frac{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128}}{7} a_2 = \frac{159}{896} a_2 .$$

On voit qu'ici $a_2 = 896$ ou en est un multiple. Si l'on prend $a_2 = 896$, on a $y_2 = 159$ et $x_2 = 737$.

En raisonnant comme dans les exemples antérieurs, on trouve aisément que dans le cas du calendrier à 52 et 53 semaines et pour lequel $\epsilon = \frac{7}{900}$, on a :

$$(1''_2)\quad x_2 + y_2 = a_2,\quad 364x_2 + 371y_2 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{7}{900}\right) a_2 ;$$

$$(2''_2) \qquad y_2 = \frac{1 + \frac{1}{4} - \frac{7}{900}}{7} a_2 = \frac{559 a_2}{450 \times 7}.$$

Donc le minimum de a_2 est 3150, le minimum de y_2 est 559 et celui de x_2, 2591.

De même dans le cas du calendrier à 52 et à 53 semaines et pour lequel $\epsilon = \frac{1}{125}$, on a :

$$(1'''_2) \quad x_2 + y_2 = a_2, \qquad 365 x_2 + 371 y_2 = \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{125}\right) a_2.$$

$$(2'''_2) \quad x_2 = \frac{2879}{3500} a_2, \qquad y_2 = \frac{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{125}}{7} a_2 = \frac{621 a_2}{500 \times 7}.$$

Par suite, le minimum de a_2 est 3500 et le minimum de y_2, 621 ; le minimum de x_2 est donc lui-même 2879.

A propos des calendriers à 52 et à 53 semaines, de même que dans le cas des calendriers à 365 et à 366 jours, j'ai maintenu, dans les seconds membres des relations (2) donnant la valeur de y_2, une première forme caractéristique, qui permet de déduire la règle générale fournissant le nombre d'années non communes pour l'espèce de calendriers actuellement considérée. D'après cette règle, qui peut d'ailleurs sans difficulté être aussi établie directement, on a, pour la relation entre les quantités y_2 et a_2 dans le cas d'une année moyenne de $\left(365 + \frac{1}{4} - \epsilon\right)$ jours et d'un calendrier composé d'années de 52 et de 53 semaines, la formule que voici :

$$(\alpha_2) \qquad y_2 = \frac{1 + \frac{1}{4} - \epsilon}{7} a_2.$$

Si l'on divise $1 + \frac{1}{4} - \epsilon$ par 7, le quotient est certainement < 1. S'il est représenté par $\frac{\mu_2}{\nu_2}$ où $\mu_2 < \nu_2$, on peut écrire, au lieu de (α_2),

$$(\alpha'_2) \qquad y_2 = \frac{\mu_2}{\nu_2} a_2,$$

et si $\frac{\mu_2}{\nu_2}$ est supposé réduit à sa plus simple expression, le minimum de a_2 est ν_2 et le minimum de y_2 est μ_2.

Dans le calendrier de Searle $\left(\epsilon = \frac{3}{400}\right)$, la fraction $\frac{1 + \frac{1}{4} - \epsilon}{7}$ n'est pas irréductible, elle est égale à $\frac{71 \times 7}{400 \times 7}$; cette fraction est, au contraire, irréductible et égale à $\frac{159}{896}$ dans le cas du calendrier de Bedeus $\left(\epsilon = \frac{1}{128}\right)$; cette fraction est encore irréductible dans le cas où $\epsilon = \frac{7}{900}$ et dans celui où $\epsilon = \frac{1}{125}$.

3. Pour abréger, j'appelle avec M. Alliaume [1] calendrier *à jours intercalaires* tout calendrier composé d'années de 365 et de 366 jours et calendrier *à semaines intercalaires* tout calendrier composé d'années de 52 et de 53 semaines.

Dans le cas où la valeur de ϵ est la même pour un calendrier à jours intercalaires et pour un calendrier à semaines intercalaires, on peut aisément trouver une relation générale entre les quatre quantités a_1, y_1, a_2, y_2.

A cette fin, il suffit de noter que ϵ possédant actuellement la même valeur, les formules (α_1) et (α_2) donnent :

$$(\beta) \qquad \frac{7y_2}{a_2} - \frac{y_1}{a_1} = 1.$$

C'est la formule générale cherchée. Toutefois on n'oubliera pas que les quatre quantités ainsi liées par une seule relation sont

---

[1] Cf. M. Alliaume, *La construction du calendrier*, dans Ciel et Terre, XL[e] année, n[os] 6 et 7-8 (juin et juillet-août 1924).

L'article en question traite à peu près le même sujet que le travail actuel, mais l'exposition est très différente. Entre autres travaux, l'auteur recommande avec raison :

G. Bigourdan, *Projet de réforme du calendrier civil actuel*, dans C. R. (Paris), t. 168 (1919, 1), p. 21 ; H. Deslandres, *Sur la réforme du calendrier*, C. R. (Paris), t. 168 (1919, 1), p. 133.

des nombres entiers et positifs, conditions qui ne sont pas exprimables par des équations.

Supposons y_1 et a_1 calculés et $\frac{y_1}{a_1}$ réduit à sa plus simple expression $\frac{\mu_1}{\nu_1}$; d'après (β), $7y_2 - a_2$ et a_2 sont des équimultiples de μ_1 et de ν_1.

Faisons encore les remarques que voici :

Comme nous l'avons déjà dit, si $\epsilon = \frac{3}{400}$ (calendriers grég. et de Searle), la fraction $\frac{1}{4} - \epsilon$ est irréductible, tandis que $\frac{1 + \frac{1}{4} - \epsilon}{7}$ est réductible puisqu'elle n'est égale à $\frac{71}{400}$ qu'après que l'on a supprimé haut et bas le facteur 7. Le minimum de a_2 est donc ici égal au minimum de a_1, c'est-à-dire à 400 et la relation (β) donne :

$$7y_2 = a_1 + y_1, \tag{γ}$$

résultat facile à vérifier, car $y_2 = 71$, $a_1 = 400$ et $y_1 = 97$.

Si $\epsilon = \frac{1}{128}$ (calendriers de Mädler et de Bedeus), les fractions $\frac{1}{4} - \epsilon = \frac{31}{128}$ et $\frac{1 + \frac{1}{4} - \epsilon}{7} = \frac{159}{7 \times 128}$ sont l'une et l'autre irréductibles. Par suite — et c'est ce qui a déjà été dit — le minimum de a_1 est 128 et le minimum de a_2 est 128×7.

Dans ce cas, d'après (β), on a :

$$y_2 = a_1 + y_1, \tag{δ}$$

relation facile à vérifier.

Si $\epsilon = \frac{7}{900}$ (nouveau calendrier des églises orthodoxes et calendrier à semaines intercalaires, de même ϵ), $\frac{1}{4} - \epsilon = \frac{218}{900}$ est une fraction réductible égale à $\frac{109}{450}$, tandis que $\frac{1 + \frac{1}{4} - \epsilon}{7} = \frac{559}{450 \times 7}$

est irréductible. Dans ce cas, on a encore $a_2 = 7a_1$ et par suite la relation (δ), savoir $y_2 = a_1 + y_1$, comme il est aisé de le vérifier.

Enfin si $\epsilon = \frac{1}{125}$, la fraction $\frac{1}{4} - \epsilon$ est irréductible et il en est de même de la fraction $\frac{1 + \frac{1}{4} - \epsilon}{7}$.

En somme, dans tous les cas examinés [1], sauf un seul, c'est la relation $a_2 = 7a_1$, donc $y_2 = a_1 + y_1$ qui est satisfaite. L'exception concerne le cas de $\epsilon = \frac{3}{400}$; alors $a_2 = a_1$ et $7y_2 = a_1 + y_1$.

On constate aisément que si a_1 possède sa valeur minimum, on ne peut, *en général*, avoir $a_2 = \lambda a_1$, dès que λ est différent de 1, de 7, ou de leurs multiples. *Règle générale*, parce que la relation (4) peut s'écrire :

$$(\beta^{bis}) \qquad \frac{7y_2}{a_2} = 1 + \frac{y_1}{a_1}$$

et que si, par exemple, $a_2 = 2a_1$, on a $7y_2 = 2(a_1 + y_1)$; or, *a priori*, cette formule peut, dans certains cas très particuliers de a_1 et de y_1, donner pour y_2 une valeur entière.

4. Dans ce qui précède, après avoir rappelé certains types de calendriers particulièrement intéressants au point de vue de ce travail, j'ai déterminé le cycle de chaque calendrier ainsi que le nombre d'années communes et le nombre d'années non communes et dans l'hypothèse où l'on se donne la longueur de l'année moyenne ; j'ai en outre comparé les éléments a et y des calendriers à jours et à semaines intercalaires et dont l'année moyenne a la même longueur.

Il me faut maintenant noter que l'établissement de ces résultats est insuffisant pour la formation d'un calendrier. Pour qu'un calendrier réponde à son but, on doit encore, entre autres, entremêler, autant que possible, tout le long du cycle, les années com-

---

[1] Ce résultat ne doit pas étonner, puisque, généralement $1 + \frac{1}{4} - \epsilon$ n'est das divisible par 7.

munes et les années non communes, de manière à neutraliser, par l'introduction d'années d'une espèce, les écarts, autour de l'année moyenne, qui sont produits par les années de l'autre espèce. Si l'on n'agissait pas de la sorte, le calendrier serait mauvais, puisque les saisons ne pourraient se reproduire aux mêmes dates du calendrier ; de là de graves inconvénients, entre autres, pour l'agriculteur qui ne saurait plus aisément à quelles époques il doit ensemencer et récolter. C'est, par exemple, ce qui arriverait — comme il est facile de le voir — si, dans le calendrier grégorien, on commençait le cycle par les 303 années communes ou par les 97 années bissextiles.

5. Il y a plus. Pour faciliter l'usage d'un calendrier, on doit aussi établir une *règle* qui lui est propre et permettant de déterminer aisément si une année d'un millésime donné est de 366 jours (dans le cas d'un calendrier à jours intercalaires) ou si elle est de 371 jours (dans le cas d'un calendrier à semaines intercalaires).

Par exemple, nous savons bien, grâce au § 1, que dans le calendrier julien, où l'année moyenne est égale à $365\frac{1}{4}$ jours, le cycle de 4 ans est composé de 3 années communes et d'une année bissextile ; mais sur 4 années successives, on a encore, au point de vue scientifique proprement dit, le droit de prendre l'une quelconque de ces années comme année bissextile. C'est pour une raison de convenance qu'on a choisi comme telle l'année dont le millésime est divisible par 4. De là la *règle* bien connue relative à ce calendrier.

Il résulte de la règle à laquelle il vient d'être fait allusion que si l'on considère un nombre d'années civiles multiple de 4 et représenté par a, le nombre d'années bissextiles y_j que renfermerait le calendrier s'il était julien est évidemment égal à $\frac{a}{4}$. En d'autres termes, si l'on appelle R_j le rapport $\frac{y_j}{a}$, on a :

$$(R_j) \qquad R_j = \frac{y_j}{a} = \frac{1}{4}.$$

Cela étant, si l'on se reporte aux calendriers à jours intercalaires qui ont été pris ci-dessus comme exemples et si, pour le calendrier dont l'ϵ est égal à $\frac{7}{900}$, on prend $a_1 = 900$, on constate que le cycle a_1 est, dans chaque cas, un multiple de 4. Par suite, si R_1 est le rapport $\frac{y_1}{a_1}$ correspondant à l'un des cas particuliers dont il s'agit, on a, en vertu de (α_1) :

$$R_1 = \frac{1}{4} - \epsilon ;$$

en calculant le $\frac{y_j}{a_1}$ correspondant au cycle a_1 considéré, on peut donc écrire :

(R_1) $$R_1 = R_j - \epsilon.$$

On sait d'ailleurs que, dans chacun des cas susvisés, le dénominateur de ϵ est lui-même égal au cycle a_1 du calendrier. On en conclut qu'on peut regarder le numérateur de ϵ comme représentant combien le calendrier considéré a, par cycle, d'années bissextiles de moins que le calendrier julien. De là, une *règle d'intercalation* très simple commune à tous les calendriers en cause.

Peut-être n'est-il pas inutile pour certains lecteurs d'appliquer la règle aux divers cas examinés plus haut. S'il s'agit du calendrier grégorien, le cycle est de 400 ans et le numérateur de ϵ est 3. Donc sur 400 ans, il y a, dans le calendrier grégorien, 3 années bissextiles de moins que dans le calendrier julien. Dans ces conditions et en vertu même de la règle commune à tous les calendrier à jours intercalaires, on commence par maintenir, pour le calendrier grégorien, comme règle générale de détermination des bissextiles, celle qui avait été adoptée pour le calendrier julien ; puis, en ce qui concerne les 3 bissextiles en moins sur 400 ans, on admet, pour le calendrier grégorien, que les années dont le millésime est terminé par deux zéros ne sont bissextiles que quand ce millésime est divisible par 400. C'est le procédé le plus simple ; c'est celui qui, pour ce cas particulier (notre calendrier ordinaire), a été adopté dès 1582.

Des règles analogues sont applicables à chacun des autres calendriers à jours intercalaires dont il a été question dès le § 1.

Par exemple, pour le calendrier dans lequel ϵ est égal $\frac{1}{125}$ ou, ce qui est la même chose, à $\frac{4}{500}$, on opérerait comme pour le calendrier grégorien ; seulement, au lieu de retrancher 3 années bissextiles sur 400 ans, on en retrancherait 4 sur 500, en admettant qu'une année dont le millésime est terminé par deux zéros n'est bissextile que si ce millésime est divisible par 500.

A propos du calendrier de Mädler, on pourrait, toujours en se basant sur le même principe, commencer, comme lors du calendrier grégorien, par choisir, en règle générale, pour bissextile, toute année dont le millésime est divisible par 4 ; puis admettre que tous les 128 ans une année qui devrait être bissextile d'après la règle générale, doit être année commune. Si donc le calendrier de Mädler avait été adopté en 1900, on aurait pu prendre cette année comme année commune et opérer de la même manière pour les années 2028, 2156, etc.

Quant au nouveau calendrier des églises orthodoxes orientales, on pourrait, en raison des formules (2″) ci-dessus, y considérer le cycle comme étant de 450 ans ; mais en fait, pour faciliter l'énonciation de la règle relative aux bissextiles dont le millésime est terminé par deux zéros, on paraît avoir préféré un cycle de deux fois 450 ans.

La règle donnée à ce sujet, analogue aux deux précédentes est, en effet, ainsi énoncée [1] :

« Sont bissextiles toutes les années dont le millésime est divisible par 4. Il y a exception pour les années dont le millésime est terminé par deux zéros ; pour ces années-là, ne sont bissextiles que celles dont le millésime divisé par 9 donne pour reste 2 ou 6. [2]»

---

[1] Astronomische Nachrichten, t. 220, n° 5279, p. 382, [article de M. Milankovitch, cité p. 22 ci-dessus, note (2)].

[2] Il est bien entendu qu'en principe, la règle donnée n'est pas obligatoire, même si l'on n'a égard, pour supprimer 7 bissextiles, qu'aux années dont le millésime est terminé par deux zéros : au lieu de « 2 ou 6 » comme reste de la division par 9, on aurait pu mettre aussi bien « 0 ou 4 », « 1 ou 5 », « 3 ou 7 », « 4 ou 8 ».

D'après cette règle, parmi les années dont le millésime est terminé par deux zéros, on compte comme bissextiles, à partir de 2000,

2000, 2400, 2900, 3300,...

Dans le calendrier grégorien, parmi les années terminées par deux zéros, les bissextiles à partir de 2000 sont, au contraire,

2000, 2400, 2800, 3200,...

Les autres bissextiles sont les mêmes dans ces deux calendriers. Si l'on se rappelle que les gouvernements de Bulgarie, Russie, Roumanie, Tchécoslovaquie et Grèce ont eux-mêmes adopté (1) le calendrier grégorien successivement en 1916, 1918, 1919 et 1923, on doit reconnaître, comme la remarque en a déjà été faite dans ces ANNALES mêmes (2), qu'une unification importante avec le calendrier grégorien a été récemment réalisée dans ces pays (3).

En ce qui concerne les calendriers de Searle (4) et de Bedeus (5), les règles qui s'y rapportent ont déjà été données. Une règle simple qui serait commune aux calendriers à semaines intercalaires ne peut être établie, comme on peut en juger par la formule (α_2) ou par d'autres qui s'en déduisent. C'est uniquement par suite d'une circonstance fortuite signalée plus haut que l'on est conduit pour le calendrier de Searle à un cycle de 400 ans comme pour le calendrier grégorien, de même année moyenne.

Quant aux calendriers à semaines intercalaires et pour lesquels $\epsilon = \frac{7}{900}$ ou $\frac{1}{125}$, je ne crois pas utile de m'y arrêter davantage, les cycles qui s'y rapportent (3150 et 3500) me paraissant trop

---

(1) Cf. D. Eginitis, *La réforme du calendrier en Grèce*, dans les C. R. DE L'AC. DES SC. (Paris), t. 176, n° 11, 12 mars 1923, pp. 735-737.

(2) A.S.S.B., art. cité, p. 328.

(3) Dans un grand nombre d'autres pays, le calendrier grégorien a aussi été adopté. A ce propos, on peut consulter les pp. 7 et 8 du document C.C.T./R.C. 1re session/P.V., imprimé sous les auspices de la Société des Nations.

(4) A.S.S.B., art. cité, pp. 335-336.

(5) En se reportant à la p. 336 note (1) de l'article cité à la note précédente, on trouvera même une rectification concernant la règle de Bedeus.

considérables pour pouvoir conduire à une règle aussi simple que celle de Searle.

En rangeant les calendriers d'après la grandeur de leur année moyenne, on peut encore former l'intéressant tableau que voici qui permet d'apprécier la valeur théorique des calendriers en cause (1) :

Valeur de ϵ	Cycle et dénomination	Nombre de jours de l'année moyenne
$\frac{1}{125} = \frac{4}{500} = \frac{3}{400} + \frac{1}{2000}$	500, calendrier à jours intercalaires 2000, calendrier grégorien rectifié 3500, calendr. à semaines intercalaires 14000, calendrier de Searle rectifié	365,2420
$\frac{1}{128}$ . . .	128, calendrier de Mädler 896, calendrier de Bedeus	365,2421875
[Très peu inférieure à $\frac{1}{128}$	année tropique actuelle	365,24219879]
$\frac{7}{900}$ . . .	900, nouveau calendrier des églises orthodoxes orientales 3150, calendrier à semaines intercalaires ayant une année moyenne de même longueur	365,24222222...
$\frac{3}{400}$ . . .	400, calendrier grégorien 400, calendrier de Searle	365,2425
0 . . .	4, calendrier julien	365,25

(1) Il entre, dans le tableau, des calendriers qui sont appelés calendrier grégorien rectifié et calendrier de Searle rectifié ; au § suivant, on verra de quoi il s'agit.

Ce qui concerne l'année tropique a été inséré dans le même tableau, parce que les données qui s'y rapportent constituent des termes de comparaison essentiels, l'année tropique, sans entrer elle-même dans un calendrier, étant la base de tout calendrier. La quantité ϵ inscrite à son sujet indique ce que devrait être cette quantité dans un calendrier qui aurait comme année moyenne la longueur même de l'année tropique actuelle. Par suite de ces circonstances, tout ce qui regarde l'année tropique a été mis entre crochets.

6. Afin de déterminer, ce qui est l'objet de ce § 6, quel est le calendrier qu'il conviendrait d'adopter à l'époque actuelle, je commence par remarquer que déjà la Commission nommée par le pape Grégoire XIII a donné sa préférence à un projet qui pouvait ne pas être le meilleur au point de vue de la précision. Dans sa pensée, la condition essentielle d'un bon calendrier était de conduire pour l'intercalation des bissextiles à une règle extrêmement simple, pouvant être aisément comprise de la généralité; elle estimait que son projet, qui est devenu le calendrier grégorien, réalisait cette condition, tout en fournissant une année moyenne satisfaisante (1).

On peut ajouter que la susdite Commission n'a nullement considéré comme intangible la règle qu'elle proposait ; elle a reconnu qu'avec les progrès de la science, on pourrait être amené à établir une règle d'intercalation conduisant à une année civile différant moins de l'année tropique que ne le fait la règle grégorienne (2).

Certes, le nouveau calendrier des églises orthodoxes orientales est plus précis que le grégorien en ce sens que son année moyenne est et restera, peut-être pendant très longtemps, un peu plus voisine de l'année tropique actuelle (3). Seulement le calendrier

---

(1) La Commission trouva que l'année civile qu'elle proposait et qui est de 365 j. 44 m. 12 s. était de 12 s. plus petite que l'année tropique des tables alphonsines ; c'est cette approximation qu'elle regarda comme satisfaisante. Cf. F. K. Ginzel, *op. cit.*, t. III, p. 258.

(2) C'est ce que dit Clavius, le membre le plus actif de la Commission: «.... ac proinde alia quoque intercalationis regula instituenda sit. » *(Kalendarii romani a Gregorio XIII restituti explicatio,* c. V, 15).

Cf. Chauve-Bertrand, *La question du calendrier,* ouvrage cité, note (1) de la p. 120.

F. K. Ginzel, *op. cit.*, t. III, pp. 257 et 258.

Ce dernier donne à l'ouvrage de Clavius un titre un peu différent, savoir *Explicatio Romani Calendarii a Gregorio XIII P. M. restituti* et fait remonter sa publication à l'an 1603, donc à 21 ans après la réforme. Dans son mémoire *Novi Colendarii Romani Apologia adversus Michaelem Maestlinum Göppingensem in Tubigensi Academia Mathematicum tribus libris explicata* paru à Rome en 1588, il s'était borné à répondre aux attaques de l'astronome Maestlin relatives au même calendrier grégorien. Les *Opera Clavii* ont été publiés à Mayence en 1612.

(3) Cf. le tableau qui termine le § 5 ci-dessus.

en question, tout récent, n'est appliqué que par les églises orthodoxes orientales, son cycle est notablement plus long puisqu'il est de 900 ans, puis la règle d'intercalation qui le concerne est incontestablement moins simple, surtout que la généralité ignore le caractère auquel on reconnaît immédiatement le reste de la division d'un nombre par 9. Pour la plupart des peuples, le nouveau calendrier dont il s'agit n'a donc pas sur le calendrier grégorien des avantages suffisants pour qu'il y ait lieu d'abandonner l'un en faveur de l'autre.

Cette dernière observation serait applicable au calendrier à semaines intercalaires qui aurait une année moyenne de même longueur que le nouveau calendrier des églises orthodoxes orientales ; de plus, le cycle serait plus long encore (de 3150 ou 6300 ans), la règle d'intercalation y serait moins simple, de sorte qu'il n'est pas non plus à conseiller.

Au Congrès de Rome tenu en mai 1922, la Commission 32 n'a pas pris en considération l'idée de Mädler de retrancher un jour bissextile tous les 128 ans et s'est prononcée à l'unanimité en faveur de la conservation du cycle grégorien de 400 ans tel qu'il est aujourd'hui employé (1).

Certains s'étonneront peut-être d'une pareille décision, surtout que le calendrier de Mädler est de loin le plus précis pour l'époque actuelle et le sera sans doute encore longtemps. Si la Commission 32 a pris cette attitude, c'est incontestablement pour les raisons développées par le président M. Bigourdan et qui sont résumées comme suit au bas de la p. 184 des TRANSACTIONS susvisées :

« *Longueur de l'année. Doit-on conserver ou modifier le cycle grégorien de 400 ans ?*

» Ce point est spécialement de la compétence des astronomes. Il a été étudié avec soin depuis plusieurs années.

» Le président pense que toute proposition de modifier la règle grégorienne d'intercalation des jours bissextiles doit être écartée, parce que cette règle est suffisamment exacte pour plusieurs

---

(1) Cf. TRANSACTIONS OF THE INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION, vol. I, p. 185, edited by Prof. A Fowler, F. R. S. (General Secretary). London, Imperial College Bookstall.

milliers d'années encore ; — parce qu'elle est d'une simplicité et d'une commodité pratiques remarquables ; — parce qu'enfin la petite variation adoptée aujourd'hui pour la longueur de l'année n'est pas déterminée assez exactement pour qu'il soit possible actuellement de songer à établir une règle applicable dans 30 ou 40 siècles. »

Les motifs qui, au Congrès de Rome, ont fait écarter le calendrier de Mädler, sont applicables au calendrier de Bedeus qui a de plus l'inconvénient d'avoir un cycle notablement plus long (896 ans au lieu de 128) et une règle moins simple.

Quant au calendrier à jours intercalaires et dont l'ϵ est égal à $\frac{1}{125}$, il a, on ne peut le nier, de sérieux avantages : son cycle est presque aussi court que celui du calendrier grégorien (500 ans au lieu de 400) et la règle en est tout aussi simple ; de plus, son année moyenne est plus voisine de l'année tropique actuelle et, pendant longtemps peut-être, cet avantage ira en augmentant puisque cette année moyenne est inférieure à l'année tropique et que celle-ci, si l'on en croit les lois précitées, ne fait que décroître (1).

---

(1) La formule fondamentale de M. Alliaume pour les calendriers à jours intercalaires se trouve au bas de la p. 143 de son article de Ciel et Terre ; la voici :

$$(a + b)\,T = 365a + 366b.$$

Dans cette formule, a représente le nombre d'années communes et b le nombre d'années bissextiles correspondant à une période de $(a + b)$ années et T est la durée approximative d'une année tropique que l'on s'est donnée.

Algébriquement, cette formule se confond avec celle qui découle du procédé que j'ai moi-même indiqué dès le 7e alinéa du § 1 de ce travail, où il est dit : « Si l'on multiplie par 365 le nombre d'années communes ..... calendrier dont il s'agit. » La seule différence, c'est que, d'après mon interprétation, la lettre T de M. Alliaume représente l'année moyenne du calendrier qui est en cause. Au fond, la différence des deux procédés n'est qu'apparente, en vertu même du 8e alinéa du susdit § 1 : « Pour qu'un calendrier réponde à son objet, on doit naturellement s'arranger de façon que l'année moyenne diffère très peu de l'année tropique. »

Dans ces conditions, il n'est pas étonnant qu'en opérant d'une manière indépendante, j'aie retrouvé, entre autres, à propos du calendrier maintenant en cause, les résultats établis antérieurement par M. Alliaume (p. 144 de l'article susvisé).

D'après les C. C. T./R, C. 7, annexe, Genève, mai 1924, p. 67, le Dr C. F. Marvin,

En tous cas, il semble bien que le calendrier en question peut être considéré comme étant, pour l'époque actuelle, le plus satisfaisant parmi ceux qui ont été visés dans l'article de M. Alliaume ou dans ce travail ; comme Alliaume le dit (1), c'eût été le meilleur à établir au XVI^e^ siècle, lors de la réforme du calendrier.

Mais maintenant que le calendrier grégorien existe depuis près de 350 ans et qu'il est devenu presque universel, convient-il de l'abandonner pour lui en substituer un autre qui n'a comme avantage qu'un peu plus de précision pendant un laps de temps peut-être très long, mais qu'il est impossible de déterminer vu l'imperfection de nos connaissances relativement à la véritable loi des variations de l'année tropique ? A mon avis, le mieux est de conserver le calendrier grégorien dans ses grandes lignes, en le modifiant dans un détail, de manière qu'ainsi rectifié, il ait la précision relative du calendrier dont le cycle est de 500 ans. Pour que ce dernier résultat soit atteint, il suffit d'ailleurs, quand on n'a pas égard aux variations de l'année tropique, que la correction apportée à l'année moyenne du calendrier grégorien donne à l'ϵ du nouveau calendrier la valeur que possède cette quantité dans le calendrier dont le cycle est de 500 ans.

Pour calculer cette correction, rappelons-nous que nous avons trouvé au § 1 que, par cycle de 500 ans, le nombre de bissextiles dans ce dernier calendrier est 121 et que, par cycle de 400 ans, le nombre de bissextiles dans le calendrier grégorien est 97. Afin de rendre comparables ces nombres de bissextiles, prenons le plus petit commun multiple des deux cycles, donc de 500 et de 400. Ce plus petit commun multiple est 2000. En 2000 ans, le nombre de bissextiles dans le calendrier grégorien est $97 \times 5 = 485$ et dans l'autre calendrier ce nombre est égal à 484. Après 2000 ans, il y a donc dans le calendrier grégorien une année bissextile de trop pour que ce calendrier acquière la précision relative de l'autre. En conséquence, quand on ne tient pas

---

chef du Bureau météorologique à Washington, (États-Unis) propose de supprimer, à partir de l'an 2000, quatre années bissextiles par période de 500 ans. Cette solution, est-il ajouté à la même p. 67, aurait pour effet de maintenir le calendrier exact, *à un jour près*, pendant 10000 ans environ.

(1) p. 144 de son article.

compte des variations de l'année tropique, *pour rectifier le calendrier grégorien, on n'a qu'à supprimer une bissextile tous les* 2000 *ans* (²). Pour arriver à cette fin, le plus pratique *est d'admettre que l'an* 2000, qui devrait être bissextile dans le calendrier grégorien, *sera une année commune et qu'il en sera de même, si nos successeurs le jugent bon, de l'an* 4000, *de l'an* 6000, etc. A mon sens, en ce qui concerne la longueur moyenne de l'année, *c'est à ce changement extrêmement simple relatif à l'an* 2000 *que devrait se borner*, pour le moment, *la réforme du calendrier*.

Dans le petit calcul qui vient d'être fait — cela a été dit — on n'a pas eu égard aux petites variations de l'année tropique. Cette hypothèse paraît bien légitime, puisque les variations en question paraissent le mieux déterminées à l'époque actuelle et qu'elles ne dépassent pas 1ˢ pour un siècle, c'est-à-dire pour le laps de temps qui sépare l'an 2000, qui est en cause, de l'an 1900, date à laquelle se rapporte la valeur adoptée pour l'année tropique.

Puisque le calendrier grégorien rectifié comme il vient d'être dit a une année moyenne moindre que l'année tropique actuelle et que l'année tropique paraît maintenant diminuer au fur et à mesure que le temps s'écoule, on peut définitivement penser que si on l'arrêtait provisoirement à l'an 2000, l'introduction du calendrier grégorien rectifié aurait sans doute pour résultat de rapprocher l'année moyenne de l'année tropique plus que ne le fera le calendrier grégorien ordinaire, de sorte que cette introduction ne serait probablement qu'avantageuse. Si l'on se rappelle que pendant ces dernières années, un bon nombre de gouvernements ou d'églises, en Europe ou ailleurs, ont abandonné leur calendrier pour en adopter un autre qui se confond avec le calen-

---

(¹) Par suite des définitions du cycle et de l'année moyenne données au § 1, la durée du cycle du calendrier grégorien rectifié est de 2000 ans. Cette durée est plus longue que celle d'autres cycles correspondant à des calendriers qui ont été considérés comme n'étant pas acceptables en raison même de la trop longue durée de leurs cycles.

Si je ne suis pas porté à rejeter aussi en raison de la trop grande longueur de son cycle le calendrier grégorien rectifié, c'est que, malgré cette longueur, la règle relative à ce calendrier est presque aussi simple que celle du calendrier grégorien lui-même.

drier grégorien ou s'en rapproche beaucoup, on peut penser que l'époque actuelle est particulièrement propice à une unification plus générale des calendriers. Si les peuples utilisant le calendrier grégorien acceptent en effet de le modifier dès maintenant de manière à le rendre un peu meilleur, ceux qui font encore usage d'un autre calendrier seront sans doute plus portés à faire aussi l'abandon de celui dont ils se servent. De la sorte, grâce à des concessions réciproques, l'unification universelle s'établira par l'adoption du meilleur calendrier qu'on puisse instaurer dans l'état actuel de la science. Nos successeurs verront ensuite, par exemple, avant l'an 4000 ou l'an 6000 dans quel sens et dans quelle mesure il conviendra de modifier le nouveau calendrier que nous leur aurons laissé (1).

D'ici là, les astronomes feront bien de continuer la détermination régulière de la durée de l'année tropique pour mieux préciser la loi de ses variations.

Tout en étant partisan du maintien du calendrier grégorien provisoirement rectifié comme il vient d'être dit, j'estime qu'il serait avantageux, pour le rendre perpétuel, d'y introduire un jour hors semaine quand l'année est commune et deux jours hors

---

(1) D'après Chauve-Bertrand, *op. cit.*, p. 124, Delambre avait proposé de faire la suppression d'un jour l'an 4000 ainsi que les autres années multiples de 4000.

Marvin [cf. p. 40, note 1)] propose de rendre commune l'année 2000, puis de supprimer, par rapport au calendrier julien, 4 bissextiles sur 500 ans. Si, à partir de l'an 2000, nos successeurs continuaient de supprimer, dans le calendrier grégorien, une bissextile tous les 2000 ans, c'est-à-dire si à partir de l'an 2000 ils trouvaient avantageux d'appliquer le procédé grégorien rectifié, l'année moyenne de leur cycle se confondrait évidemment avec l'année moyenne du calendrier Marvin puisque l'ϵ du premier de ces calendriers $\left(\frac{3}{400} + \frac{1}{2000}\right)$ ne diffère pas de $\frac{4}{500}$, qui est l'ϵ du calendrier Marvin ; ces deux calendriers auraient donc la même approximation, par rapport à l'année tropique comme le comporte le tableau qui termine le § 5 du présent travail. Personnellement je considère le calendrier grégorien rectifié comme étant préférable au point de vue pratique, attendu qu'on y conserve dans ses grandes lignes le calendrier grégorien, de loin le plus répandu, et qu'on ne fait que le modifier une fois tous les 2000 ans en rendant années communes les années 2000, 4000....

semaine quand l'année est bissextile. Dans ma pensée, abstraction faite de ces jours hors semaine, il serait bon d'égaliser les quatre trimestres de l'année (1) : ces trimestres comprendraient donc tous 91 jours (de semaine), lesquels seraient répartis en deux mois de 30 jours et un de 31 et les mêmes jours de semaine se répéteraient chaque trimestre, quelle que soit l'année.

Au point de vue civil, la stabilisation de la fête de Pâques me paraît désirable, mais je reconnais volontiers qu'il s'agit là d'une question appartenant avant tout au domaine religieux.

Si, conformément au vote du Bureau des Longitudes (2) (Paris), on préférait, pour rendre le calendrier perpétuel, adopter, malgré ses inconvénients (3), un calendrier à semaines intercalaires, on pourrait, pour déterminer son choix, commencer par remarquer que si, au Congrès de Rome en 1922, il avait été question de calendriers à semaines intercalaires, le calendrier de Bedeus n'y aurait sans doute pas été pris en plus grande considération que le calendrier de Mädler (4) et cela pour les mêmes motifs, *mutatis mutandis*. J'ai d'ailleurs (p. 36) écarté aussi les calendriers à semaines intercalaires dont l'ϵ est égal à $\frac{7}{900}$ ou à $\frac{1}{125}$ parce que je les trouve peu pratiques, leurs cycles me paraissant trop considérables (3150 et 3500 ans) pour conduire à une règle aussi simple que celle de Searle.

---

(1) En Europe, l'usage des trimestres et des semestres est très utile. Malgré certains avantages pratiques, je n'opinerais pas en faveur du projet américain de diviser l'année en 13 mois de 28 jours chacun ; le nombre 13 est un nombre premier trop considérable pour l'introduire dans l'usage courant comme rapport de deux unités de mesure du temps. Les multiples et sous-multiples généralement adoptés à ce propos sont déjà de deux espèces : les uns appartiennent au système métrique décimal, les autres au système duodécimal ; ne compliquons pas davantage par l'introduction du nouveau facteur 13.

Il est d'ailleurs bien entendu qu'à mon avis, la division de l'année en 12 mois répartis comme il est dit dans le texte et qui égalise les trimestres ne fait pas obstacle à une division auxiliaire par 14 et 28 jours. [Cf. A.S.S.B., art. cité, p. 333, note (1)].

(2) Ce vote a déjà été signalé dans ce travail. Cf. note (1), p. 27.

(3) A.S.S.B , art. cité, p. 337.

(4) Cf. p. 22, du travail actuel.

D'autre part, on verrait aisément que pour rectifier le calendrier de Searle, c'est-à-dire pour lui donner la précision du calendrier à semaines intercalaires dont l'ε est égal à $\frac{1}{125}$, il faudrait simplement, sur 14000 ans, supprimer une bissextile au calendrier de Searle non rectifié.

Ce cycle de 14000 ans est certainement long, mais la règle qui s'y rapporte est presque aussi simple que celle du calendrier de Searle lui-même.

Si l'on se rappelle que la loi des variations de l'année tropique est trop peu exactement connue pour qu'on puisse l'utiliser avec confiance pour un laps de temps aussi long que 140 siècles et si l'on veut dès maintenant, mais provisoirement, faire un choix entre le calendrier de Searle et ce même calendrier rectifié, on est porté à laisser à d'autres, s'ils le jugent bon, le soin d'adopter plus tard le calendrier de Searle rectifié pour se borner momentanément à donner la préférence au calendrier de Searle proprement dit.

PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

II — 1925